Fisica I, *a.a.* 2014–2015 – Sesto Appello

12 Febbario 2016, Ore 9:00 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Forze agenti su una massa sferica in caduta libera

[1] Da una torre di altezza h viene rilasciata con velocità iniziale nulla una sfera di massa m, densità uniforme ϱ e raggio r. Oltre alla forza gravitazionale di modulo $F_{grav} = mg$, a causa della presenza dell'aria con densità ϱ_{aria} (che assumiamo uniforme) sulla massa in caduta agisce (in verso opposto a quello della forza gravitazionale) anche la forza di resistenza dell'aria F_{res} che si scrive (in modulo):

$$F_{res} = \frac{1}{4}\pi r^2 \varrho_{aria} v^2 \tag{1}$$

dove v è la velocità istantanea del corpo che cade. C'è inoltre –anch'essa in verso opposto alla forza gravitazionale– la forza di Archimede F_A, di modulo:

$$F_A = g\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{aria}\right) \tag{2}$$

I dati numerici da usare quando richiesto sono: $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $h = 15\,\mathrm{m}$, $\varrho = 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$, $r = 2.5\,\mathrm{cm}$, $\varrho_{aria} = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$.

1. Verificate che F_{grav}, F_{res} e F_A espresse dalle formule date hanno le dimensioni fisiche corrette.
2. Scrivete la formula che esprime il limite massimo $(F_{res})_{max}$ che la forza (1) non può certamente superare, tale cioè che: $F_{res} < (F_{res})_{max}$ durante tutta la caduta.
3. Scrivete la formula del rapporto $\frac{F_A}{F_{grav}}$ e calcolatene poi il valore numerico. Dite come cambiereste i dati della sfera per diminuire questo rapporto, e quindi il contributo di F_A al moto della sfera.
4. Scrivete la formula del rapporto $\frac{(F_{res})_{max}}{F_{grav}}$ e calcolatene poi il valore numerico. Dite come cambiereste i dati della sfera per diminuire sia questo rapporto che quello precedente.
5. Tenete conto adesso che l'accelerazione di gravità ai piedi della torre e in cima ad essa hanno valori leggermente diversi, essendo $g(h) < g(0)$. Scrivete la formula che lega $g(h)$ a $g(0)$ sapendo che l'altezza h della torre è molto minore del raggio della Terra R_T (usate $R_T = 6400\,\mathrm{km}$). In particolare scrivete la formula $\frac{g(h)-g(0)}{g(0)}$, calcolatene il valore numerico e dite se di questo effetto occorre tenere conto in confronto a quelli considerati prima.
6. Finora non abbiamo considerato il fatto che la Terra ruota sul suo asse con un periodo $P_{rot} = 86164\,\mathrm{s}$ rispetto alle stelle fisse (le quali costituiscono in buona approssimazione un riferimento inerziale). Assumete che la torre dalla quale viene rilasciata la sfera si trovi all'equatore, dite quali altre forze agiscono sulla massa in caduta a causa della rotazione terrestre, scrivetene le formule e calcolatene i valori numerici. Commentate questi risultati immaginando di essere l'osservatore che esegue questi esperimenti di caduta per verificare la validità delle leggi fisiche che li governano.

[1]**Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo deve essere definito.**

2 Soluzione

1. Le dimensioni fisiche delle tre forze in base alle formule date sono corrette:

   $[\mathrm{F_{grav}}] = [\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}] = [\mathrm{N}]$

   $[\mathrm{F_{res}}] = [\mathrm{m}^2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}] = [\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}] = [\mathrm{N}]$

   $[\mathrm{F_A}] = [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m}^3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}] = [\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}] = [\mathrm{N}]$

2. La forza F_{res} data dalla (1) è proporzionale al quadrato della velocità istantanea della massa che cade dalla torre. Un limite superiore v_{sup} per questa velocità è il suo valore al termine della caduta nel caso che non ci fossero né la resistenza né la forza di Archimede a rallentarla, cioè in presenza della sola forza gravitazionale. Sappiamo che in questo caso il moto è uniformemente accelerato e la sfera arriva a terra al tempo t_{fin} che soddisfa l'equazione:

   $$h = \frac{1}{2}gt_{fin}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{fin} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 15}{9.8}} \simeq 1.75\,\mathrm{s} \tag{3}$$

   al quale corrisponde la velocità

   $$v_{sup} = v(t_{fin}) = gt_{fin} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 15} \simeq 17.15\,\mathrm{m/s} \simeq 61.7\,\mathrm{km/h} \tag{4}$$

   Quindi il valore massimo $(F_{res})_{max}$ che la forze di resistenza dell'aria non può certamente superare è:

   $$(F_{res})_{max} = \frac{1}{4}\pi r^2 \varrho_{aria} v_{sup}^2 \tag{5}$$

   con v_{sup} data dalla (4).

   Molti studenti hanno scritto che il valore massimo della forza di resistenza dell'aria è uguale alla forza gravitazionale F_{grav}. Vediamo quanto dovrebbe valere la velocità di caduta affinché ciò si verifichi nel nostro caso. Abbiamo:

   $$F_{grav} = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = 0.177\cdot 9.8 = 1.73\,\mathrm{N} \tag{6}$$

   quindi:

   $$(F_{res})_{max} = F_{grav} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi r^2 \varrho_{aria}}} \simeq 54.2\,\mathrm{ms^{-1}} \simeq 195\,\mathrm{km/h} \tag{7}$$

   Poiché la torre di caduta è alta $h = 15\,\mathrm{m}$ la massa che cade non può superare i $61.7\,\mathrm{km/h}$ e quindi non è assolutamente possibile che la forza di resistenza dell'aria uguagli la forza di attrazione gravitazionale della Terra. Si noti che qualora succedesse (e non ci fossero altre forze), la sfera essendo soggetta ad una forza totale nulla continuerebbe a cadere con la velocità massima raggiunta (qualche studente ha scritto che la sfera si fermeerebbe).

3. L'espressione (2) della forza di Archimede esprime il fatto che un corpo immerso nell'aria subisce una spinta dal basso verso l'alto pari al peso della massa d'aria da esso spostata. Per il rapporto richiesto risulta:

   $$\frac{F_A}{F_{grav}} = \frac{g\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{aria}}{mg} = \frac{g\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{aria}}{\frac{4}{3}\pi r^3 g} = \frac{\varrho_{aria}}{\varrho} = \frac{1.2}{2.7\cdot 10^3} \simeq 4.4\cdot 10^{-4} \quad . \tag{8}$$

   Per diminuire il valore di questo rapporto agendo sui dati della massa dobbiamo usarne una più densa. Notiamo che il raggio della sfera non influenza questo rapporto, cioè non cambia il contributo relativo della forza di Archimede rispetto alla forza garvitazionale.

4. Usano la (5) abbiamo:

$$\frac{(F_{res})_{max}}{F_{grav}} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2 \varrho_{aria} v_{sup}^2}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g} = \frac{3}{16}\frac{\varrho_{aria} v_{sup}^2}{g\varrho r} \tag{9}$$

Usando la (4) per v_{sup} abbiamo:

$$\frac{(F_{res})_{max}}{F_{grav}} = \frac{3}{16}\frac{\varrho_{aria} 2gh}{g\varrho r} = \frac{3}{8}\frac{\varrho_{aria} h}{\varrho r} = \frac{3 \cdot 1.2 \cdot 15}{8 \cdot 2.7 \cdot 10^3 \cdot 0.025} \simeq 0.1 \quad . \tag{10}$$

Dal confronto con la (6) appare chiaro che la forza di resistenza dell'aria è più rilevante della forza di Archimede, anche se per per essa abbiamo usato un limite superiore.

Per diminuire il valore di questo rapporto agendo sui dati della massa dobbiamo aumentare il valore del prodotto ϱr, cioè il prodotto della densità della massa sferica per il suo raggio. Se aumentiamo questo valore agendo solo sul raggio non diminuiamo il contribuito della forza di Archimede (il rapporto (5) non cambia aumentando il raggio della sfera). Se invece aumentiamo il prodotto ϱr aumentando sia la densità che il raggio, allora diminuisce anche il contributo della forza di Archimede, sebben in misure minore. Esempio: se aumentiamo la densità di 1.5 e il raggio di 2, il rapporto (6) diminuisce di 3 volte mentre il rapporto (5) diminuisce solo di 1.5.

5. Ai piedi della torre, cioè sulla superficie della Terra, l'accelerazione gravitazionale è:

$$g(0) = \frac{G_{M_T}}{R_T^2} \tag{11}$$

dove M_T e R_T sono la massa e il raggio della Terra. In cima alla torre di altezza h l'accelerazione di gravità è:

$$g(h) = \frac{G_{M_T}}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = g(0)\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \simeq g(0)\left(1-\frac{2h}{R_T}\right) \tag{12}$$

quindi:

$$\frac{g(h)-g(0)}{g(0)} \simeq -\frac{2h}{R_T} \simeq -\frac{2 \cdot 15}{6.4 \cdot 10^6} \simeq -4.7 \cdot 10^{-6} \tag{13}$$

e anche:

$$\frac{mg(h)}{mg(0)} \simeq \left(1-\frac{2h}{R_T}\right) = 1 - 4.7 \cdot 10^{-6} \tag{14}$$

da cui si vede che la differenza di accelerazione gravitazionale tra la cime e la base della torre è ancora meno rilevante della forza di Archimede

6. Se si tiene conto della rotazione diurna della Terra la caduta avviene in un sistema di riferimento non inerziale e bisogna tenere conto della forza centrifuga e anche di quella di Coriolis (perché la massa si muove rispetto a questo riferimento non inerziale.

Nel caso particolare in cui l'osservatore si trovi all'equatore la situazione è mostrata in Figura 1. La forza centrifuga è diretta lungo le z positive e ad una altezza di caduta $0 < z < h$ vale in modulo:

$$F_{centrifuga} = m\omega_T^2(R_T+z) = m\omega_T^2 R_T\left(1+\frac{z}{R_T}\right) = \tag{15}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\frac{F_{centrifuga}}{F_{grav}} &= \frac{\omega_T^2 R_T}{g}\left(1+\frac{z}{R_T}\right) \lesssim \frac{(7.29 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{9.8}\left(1+\frac{15}{6.4 \cdot 10^6}\right) \\ &\simeq 3.47 \cdot 10^{-3}(1+2.4 \cdot 10^{-6}) \simeq 3.47 \cdot 10^{-3} \quad .\end{aligned} \tag{16}$$

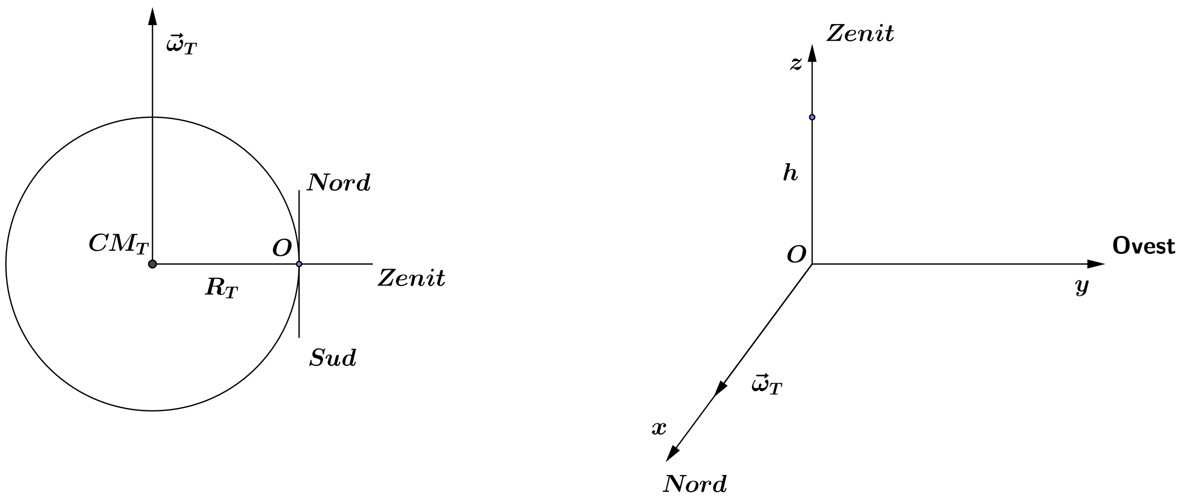

Figura 1: La figura a sinistra è centrata nel centro di massa della Terra di raggio R_T, mostra il piano meridiano dell'osservatore O che si trova all'equatore, il vettore di rotazione diurna della Terra $\vec{\omega}_T$, la direzione Nord-Sud nel piano orizzontale dell'osservatore e il suo Zenit. La figura a destra è centrata nell'osservatore O, il piano x, y è il suo piano orizzontale, l'asse z punta al suo Zenit, e lungo z giace la torre di altezza h. La forza centrifuga sulla massa che cade dalla torre lungo z è diretta lungo la direzione delle z positive e quella di Coriolis lungo la direzione della y negative.

La forza di Coriolis $-2\vec{v} \times \vec{\omega}_T$ sul corpo in caduta, essendo la velocità di caduta diretta lungo le z negative e la velocità angolare di rotazione della Terra diretto lungo le x positive (vedi Figura 1) risulta diretta lungo le y negative (verso Est). Il suo modulo è proporzionale alla velocità di caduta, e quindi sarà

$$\frac{(F_{Coriolis})_{max}}{F_{grav}} = \frac{2\omega_T v_{sup}}{g} \simeq \frac{2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot 17.15}{9.8} \simeq 2.55 \cdot 10^{-4} \tag{17}$$

Note: Per eliminare i disturbi dovuti all'aria le misure della accelerazione locale di gravità g vengono fatte in camere a vuoto (con opportuni livelli di vuoto). L'accelerazione locale di gravità, misurata localmente con strumenti che si chiamano gravimetri assoluti, comprende per definizione anche l'accelerazione centrifuga (dato che non si può fermare la rotazione della Terra). Invece l'accelerazione di Coriolis, che dipende dalla velocità di caduta, si può misurare e quindi eliminare (fino alla precisione con cui è stata misurata).