Dinamica del corpo rigido

Anna M. Nobili

Maggio 2015

1 Definizione e gradi di libertà

Si consideri un corpo di massa totale M formato da N particelle ciascuna di massa $m_i, i = 1, \ldots, N$. Il corpo si dice rigido se le distanze mutue tra tutte le particelle che lo compongono sono fisse. Per semplicità ci riferiamo a corpi rigidi formati da un numero finito di particelle discrete, eseguendo sommatorie sull'indice $i = 1, \ldots, N$.

Per corpi rigidi continui la sommatoria viene sostituita dall'integrale su tutta la massa.

N particelle indipendenti in $\mathbb{R}^3$ hanno $3N$ gradi di libertà dato che occorrono 3 coordinate per individuare univocamente la posizione di ogni particella in $\mathbb{R}^3$. Se però ognuna di esse è vincolata rigidamente a tutte le altre, la posizione del corpo rigido è fissata quando siano fissati 3 suoi punti purché non allineati: fissati 3 punti non allineati il corpo non ha più alcuna possibilità di muoversi e ogni altro suo punto è fissato rispetto ai 3 dati.

Per fissare tre punti di un corpo rigido vi vogliono sei numeri: tre per il primo punto, due per il secondo (perché la distanza dal primo è fissata), uno per il terzo punto perché le sue distanze dal primo e dal secondo sono fissate. Geometricamente possiamo dire che, una volta fissato il primo punto P_1 (date le sue tre coordinate), il secondo P_2 deve trovarsi ad una distanza fissa da P_1, e quindi deve stare sulla superficie della sfera centrata in P_1(e quindi per individuarlo bastano due coordinate), il terzo P_3 deve trovarsi a distanza fissata sia da P_1 che da P_2, e quindi anche dal segmento $\overline{P_1P_2}$, e cioè su una circonferenza, per cui basta una sola coordinata per individuarne univocamente la posizione. È chiaro che se P_3 si trovasse lungo la retta che passa per P_1 e P_2 non servirebbe a fissare la posizione del corpo rigido, perché esso potrebbe ancora ruotare lungo la retta passante per i tre punti allineati.

È dimostrato quindi che un corpo rigido ha sei gradi di libertà.

Il moto complessivo di un corpo rigido è dato dal moto traslatorio del suo centro di massa sotto l'azione di eventuali forze esterne, più il moto di tutto il corpo intorno al suo centro di massa preso come origine fissa degli assi.

2 Angoli di Eulero e sistemi di riferimento

Se ad un corpo rigido di massa totale M e vettore posizione del centro di massa $\vec{r}_{CM}$ non è applicata alcuna forza esterna vale:

$$M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad M\dot{\vec{r}}_{CM} = \overrightarrow{costante} \tag{1}$$

cioè la quantità di moto lineare del corpo rigido si conserva, così pure la sua velocità lineare, e quindi un riferimento centrato nel centro di massa che si muova con esso (e non ruoti) è un sistema di riferimento inerziale. Indichiamo come R_I questo riferimento inerziale; in Fig.1 esso è rappresentato in blu e gli assi x, y, z sono scritti in lettere minuscole. Se il corpo ruota attorno al centro di massa il riferimento solidale con esso in ogni istante e centrato nel centro di massa è un riferimento non inerziale. Indichiamo come R_{NI} questo sistema di riferimento non inerziale. In Fig.1 esso è rappresentato in rosso e gli assi x, y, z sono scritti in lettere maiuscole. I tre angoli α, β, γ mostrati in figura individuano univocamente l'orientamento (o assetto) del corpo rigido nello spazio (i.e. rispetto al riferimento R_I). Essi sono noti come *angoli di Eulero*. È evidente che una volta fissato il suo centro di massa nello spazio (che richiede 3 numeri) il corpo rigido ha solo 3 degli originali 6 gradi di libertà (3 numeri sono sufficienti per fissarlo nello spazio rispetto al centro di massa).

Ogni particella m_i del corpo rigido è individuata dal suo vettore posizione $\vec{r}_i$ rispetto all'origine (il centro di massa). Poiché l'origine è nel centro di massa vale:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{0} \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2}$$

Si noti che poiché i sistemi R_I e R_{NI} hanno la stessa origine il vettore posizione è lo stesso in entrambi; soltanto quando vorremo scriverne le coordinate esse risulteranno diverse nei due sistemi. Sorge quindi il problema di scrivere le trasformazioni di coordinate da un sistema all'altro.

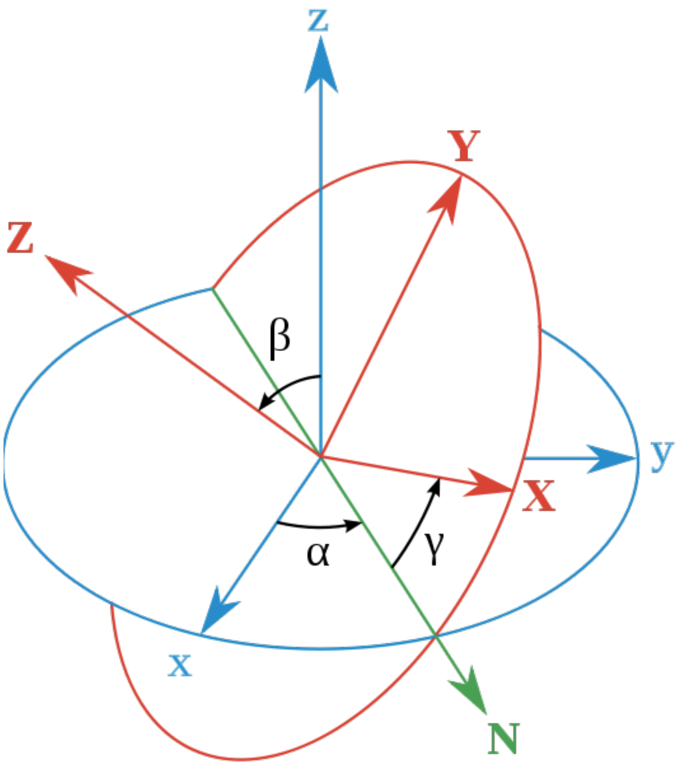


Figure 1: Il sistema di riferimento disegnato in azzurro è un riferimento inerziale R_I mentre quello disegnato in rosso è solidale con il corpo rigido R_{BF}. I due sistemi hanno la stessa origine ed essa coincide con il centro di massa del corpo rigido. I tre angoli α, β, γ – noti come angoli di Eulero – identificano univocamente la posizione del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento inerziale disegnato in azzurro. La linea N disegnata in verde è la linea di intersezione tra il piano x, y del riferimento inerziale e il piano X, Y del riferimento fisso con il corpo. In generale il corpo rigido si muove rispetto al centro di massa (ruota intorno ad esso) e quindi il riferimento R_{NI} non è inerziale. Gli angoli di Eulero si evolvono nel tempo con il moto del corpo; il loro valore in ogni istante individua la posizione del corpo rispetto al riferimento inerziale R_I.

Come mostrato in Fig.1 la posizione del corpo rigido rispetto al riferimento inerziale è individuate univocamente in ogni istante dai tre angoli di Eulero α, β, γ. Si tratta di scrivere la matrice di rotazione per passare da un sistema di riferimento all'altro. La matrice di rotazione dipenderà soltanto dai tre angoli di Eulero.

Per scrivere facilmente questa matrice di rotazione notiamo che si può passare da un sistema di riferimento all'altro di Fig.1 con tre rotazioni successive per ciascuna della quale è facile scrivere la matrice di rotazione in quanto una delle tre coordinate non viene ruotata (si tratta cioè di una rotazione nel piano). Dalle tre matrici di rotazione così scritte si ottiene la matrice di rotazione complessiva per semplice prodotto di matrici.

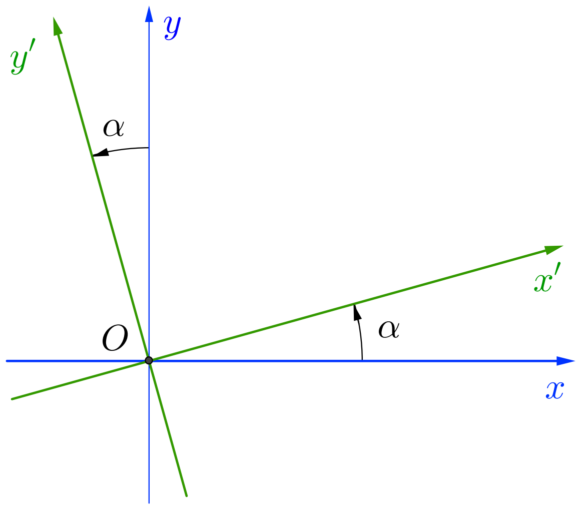
Geometricamente è facile vedere da Fig. 1 come passare dal riferimento inerziale R_I (in azzurro) a quello R_{BF} solidale con il corpo rigido (in rosso). Le tre rotazioni da eseguire sono (nell'ordine):

1. Rot1: rotazione attorno all'asse z del riferimento inerziale R_I di un angolo α positivo (quindi in verso antiorario). Questa rotazione porta dal sistema $Oxyz$ al sistema $ONN'z$ dove gli assi N e z sono entrambi indicati in figura mentre l'asse N' (che non è indicato in figura quanto ha un uso soltanto intermedio) è il terzo asse che completa la terna

2. Rot2: rotazione attorno all'asse N di un angolo β positivo (quindi in verso antiorario). Questa rotazione porta dal sistema $ONN'z$ precedente al sistema $ONN"Z$ dove gli assi N e Z sono entrambi indicati in figura mentre l'asse $N"$ (che non è indicato in figura quanto ha un uso soltanto intermedio) è il terzo asse che completa la terna

3. Rot3: rotazione attorno all'asse Z del riferimento R_{NI} solidale con il copro rigido di un angolo γ positivo (quindi in verso antiorario). Questa rotazione porta dal sistema precedente al sistema $OXYZ$ solidale con il corpo rigido

Complessivamente queste tre rotazioni – eseguite nell'ordine indicato – portano dal sistema inerziale R_I a quello R_{NI} solidale con il corpo rigido. Il vantaggio sta nel fatto che ciascuna di essa lascia fisso un asse coordinato e quindi è una rotazione nel piano, molto facile da scrivere.



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Figure 2: La figura mostra la prima rotazione delle tre descritte nel testo per passare dal riferimento inerziale a quello solidale con il copro rigido. La rotazione avviene attorno all'asse z del riferimento inerziale, che non viene mostrato. La relazione tre le coordinate scritta come prodotto di matrici è quella che permette di passare dalle coordinate di un qualunque punto nel riferimento di partenza (in questo caso quello disegnato in azzurro) a quello dello stesso punto (tenuto fermo) nel riferimento di arrivo.

Ad, esempio, la prima rotazione è mostrata in Fig.2 e la matrice di rotazione, scritta in $\mathbb{R}^3$ è:

$$Rot_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

e analogamente per le matrici delle altre due rotazioni, facendo semplicemente attenzione all'asse attorno al quale si ruota (e cioè a quale delle tre coordinate rimane invariata) possiamo scrivere:

$$Rot_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$Rot_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

La matrice di rotazione complessiva che descrive il passaggio dal riferimento inerziale a quello solidale con il corpo rigido è il prodotto matriciale delle tre, nell'ordine in cui sono state eseguite, cioè:

$$Rot_{R_I \to R_{NI}} = (Rot_\gamma)(Rot_\beta)(Rot_\alpha) \quad . \tag{6}$$

E per tornare indietro dal riferimento solidale col corpo rigido a quello inerziale occorre fare le tre rotazioni in ordine inverso, e ciascuna del suo rispettivo angolo di Eulero negativo dato che in questo caso si tratta di rotazioni in senso orario. Alla fine scriveremo:

$$Rot_{R_{NI} \to R_I} = (Rot_{-\alpha})(Rot_{-\beta})(Rot_{-\gamma}) \quad . \tag{7}$$

Per quanto riguarda i vettori velocità di ogni particella (o elemento di massa) del corpo rigido rotante intorno al centro di massa con velocità angolare $\vec{\omega}$ (non necessariamente costante) essi sono nulli nel riferimento R_{NI} solidale col corpo, dato che si tratta di un corpo rigido per definizione. Invece, nel riferimento R_I ogni particella ha velocità:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{8}$$

In generale, è importante notare che eseguire la derivata di un vettore rispetto al tempo nel riferimento R_I oppure nel riferimento R_{NI} non è la stessa cosa. Si può dimostrare che per un generico vettore $\vec{G}$ vale:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RNI} + \vec{\omega} \times \vec{G} \tag{9}$$

che si riduce a

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RI} = \vec{\omega} \times \vec{G} \tag{10}$$

se $\vec{G}$ è fisso nel riferimento non inerziale.

E per il vettore velocità angolare vale:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{RI} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{RNI} \tag{11}$$

3 Energia cinetica, momento angolare, momento d'nerzia e tensore d'inerzia

Consideriamo il corpo rigido in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$, che nel caso generale può variare sia in modulo che in direzione. Se il corpo rigido è isolato nello spazio l'asse di rotazione del corpo passa necessariamente per il suo centro di massa e quindi se siamo nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa il vettore $\vec{\omega}$ passa per l'origine.

Scriviamo la sua energia cinetica, data dalla somma dell'energia cinetica di ciascuna delle particelle che lo compongono (o dall'integrale esteso a tutto il corpo nel caso di un corpo rigido continuo). Se r_i è il vettore posizione della particella di massa m_i rispetto al riferimento inerziale (in blu in Fig. 1) abbiamo:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \tag{12}$$

dove la velocità $\dot{\vec{r}}_i$ è data dalla (8) e quindi:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} \tag{13}$$

essendo $m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ il vettore momento angolare della particella i-esima del corpo rigido e

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \tag{14}$$

il suo vettore momento angolare totale.

Si noti che abbiamo usato le proprietà del prodotto misto di vettori (si possono "ciclare" i vettori) :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{15}$$

È possibile scrivere l'energia cinetica del corpo rigido soltanto in termini della modulo quadro della sua velocità angolare. Per questo riprendiamo il momento angolare e lo riscriviamo come:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = L = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) \tag{16}$$

usando le proprietà del doppio prodotto vettore di vettori:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad . \tag{17}$$

Definiamo anche il versore $\hat{n}$ della direzione dell'asse, passante per il centro di massa, attorno al quale ruota il corpo rigido:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n} \tag{18}$$

e quindi riprendiamo l'energia cinetica (13) che diventa:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \right) = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2 \tag{19}$$

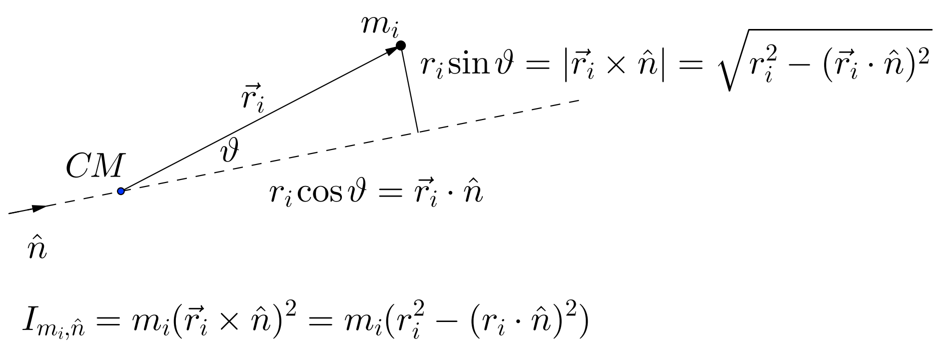


Figure 3: Definizione del momento di inerzia di una particella di massa m_i e vettore posizione $\vec{r}_i$ dal centro di massa del corpo rigido di cui è parte (il corpo rigido non è mostrato in figura) rispetto all'asse individuato dal versore $\hat{n}$ passante per il centro di massa. Si noti che il verso del versore $\hat{n}$ non è rilevante per la definizione del momento di inerzia

una volta definito il momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse $\hat{n}$ (il versore della velocità angolare di rotazione del corpo, passante per il suo centro di massa) come la somma dei momenti di inerzia rispetto a questo asse di tutte le particelle che lo compongono

$$I_{\hat{n}} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \hat{n})^2 = \sum_i m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \quad . \tag{20}$$

Infatti, data la particella m_i con vettore posizione $\vec{r}_i$ la sua distanza minima dall'asse $\hat{n}$ passante per il centro di massa del corpo è il modulo del vettore $\vec{r}_i \times \hat{n}$, che vale $\sqrt{r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2}$ (si veda Fig .3) e quindi il suo momento di inerzia rispetto a questo asse è

$$I_{m_i} = m_i(\vec{r}_i \times \hat{n})^2 = m_i(r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \tag{21}$$

le cui dimensioni fisiche sono, correttamente kg m^2.

L'energia cinetica di un corpo rigido rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ è quindi data dal prodotto di ω^2 per il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, per 1/2:

$$T = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2 \quad . \tag{22}$$

Rispetto alla definizione di energia cinetica di un corpo puntiforme di massa m e velocità lineare $\vec{v}$ notiamo che nel corpo rigido la velocità angolare $\vec{\omega}$ prende il posto della velocità lineare e il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione prende il posto della massa del corpo puntiforme.

Torniamo al vettore momento angolare totale del corpo rigido definito dalla (14) e poi espresso come nella (16). Se consideriamo le sue 3 componenti L_x, L_y, L_z possiamo riscrivere la (16) in forma compatta come:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbb{I}\,\vec{\omega} \tag{23}$$

avendo definito la matrice $\mathbb{I}$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{24}$$

nota anche come "tensore di inerzia", la quale, tenendo conto della (16) si scrive esplicitamente nel modo seguente

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \Sigma_i m_i(r_i^2 - x_i^2) & -\Sigma_i m_i x_i y_i & -\Sigma_i m_i x_i z_i \\ -\Sigma_i m_i y_i x_i & \Sigma_i m_i(r_i^2 - y_i^2) & -\Sigma_i m_i y_i z_i \\ -\Sigma_i m_i z_i x_i & -\Sigma_i m_i z_i y_i & \Sigma_i m_i(r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \quad . \tag{25}$$

Tutti gli elementi della matrice hanno, ovviamente, le stesse dimensioni fisiche che sono quelle del momento d'inerzia (massa per lunghezza al quadrato). Poiché vale $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ possimao anche scrivere

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \Sigma_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\Sigma_i m_i x_i y_i & -\Sigma_i m_i x_i z_i \\ -\Sigma_i m_i y_i x_i & \Sigma_i m_i(z_i^2 + x_i^2) & -\Sigma_i m_i y_i z_i \\ -\Sigma_i m_i z_i x_i & -\Sigma_i m_i z_i y_i & \Sigma_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad . \tag{26}$$

da cui appare chiaro che, ad esempio, $y_i^2 + z_i^2$ è la distanza minima (al quadrato) della massa m_i dall'asse delle x.

Inoltre si tratta di una matrice 3×3 simmetrica, in quanto $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{yz} = I_{zy}$, $I_{xz} = I_{zx}$, il che assicura che è sempre possibile diagonalizzarla, cioè trovare un sistema di coordinate nel quale tutti gli elementi fuori diagonale della matrice sono nulli. Assumendo di aver fatto questa diagonalizzazione, indicando con I_1, I_2, I_3 i tre elementi non nulli lungo la diagonale e chiamando $\mathbb{I}_d$ la nuova matrice diagonalizzata abbiamo:

$$\mathbb{I}_d = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_i m_i({y_d}_i^2 + {z_d}_i^2) & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_i m_i({z_d}_i^2 + {x_d}_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_i m_i({x_d}_i^2 + {y_d}_i^2) \end{pmatrix} \tag{27}$$

avendo indicato con il pedice d i nuovi assi coordinati rispetto ai quali il tensore di inerzia è diagonale (i.e. ha tutti gli elementi fuori diagonale uguali a zero). Essendo coinvolte soltanto distanze, il calcolo non dipende dal sistema di riferimento (se inerziale o solidale con il corpo rigido). Si procede valutando prima di tutto le proprietà di simmetria del corpo in modo da scegliere gli assi coordinati x_d, y_d, z_d rispetto ai quali il tensore di inerzia si scrive in forma diagonale (si chiamano assi principali di inerzia).

Dalla (23), una volta che il tensore di inerzia è diagonale, la relazione tra momento angolare e velocità angolare diventa:

$$\begin{pmatrix} L_{x_d} \\ L_{y_d} \\ L_{z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_d} \\ \omega_{y_d} \\ \omega_{z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_{x_d} \\ I_2\omega_{y_d} \\ I_3\omega_{z_d} \end{pmatrix} \tag{28}$$

e l'energia cinetica, usando la (13) è:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}I_1\omega_{x_d}^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_{y_d}^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_{z_d}^2 \tag{29}$$

È importante notare dalla (28) che il vettore momento angolare non è in generale parallelo al vettore velocità angolare di rotazione. Questo può accadere se il corpo ruota attorno ad uno dei suoi assi principali, ad esempio l'asse z_d. In questo caso infatti $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_{z_d})$ e quindi $\vec{L} = (0, 0, I_3\omega_{z_d}) = I_3(0, 0, \omega_{z_d}) = I_3\vec{\omega}$. E accade anche nel caso particolare in cui $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$, cioè nel caso in cui i momenti d'nerzia rispetto ai tre assi principali siano tutti uguali:

$$\begin{pmatrix} L_{x_d} \\ L_{y_d} \\ L_{z_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_d} \\ \omega_{y_d} \\ \omega_{z_d} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega_{x_d} \\ \omega_{y_d} \\ \omega_{z_d} \end{pmatrix} \tag{30}$$

che è il caso di un corpo a simmetria sferica.

Infine, è utile calcolare la componente del momento angolare $\vec{L}$ lungo il vettore velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$, cioè il prodotto scalare:

$$L_{\hat{n}} = \vec{L} \cdot \hat{n} \quad . \tag{31}$$

Usando la (16) abbiamo:

$$L_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \sum_i m_i(\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \omega\hat{n} \cdot \sum_i m_i(\hat{n}r_i^2 - \vec{r}_i(\hat{n} \cdot \vec{r}_i)) = \omega \sum_i m_i(r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2) \tag{32}$$

che usando la (21) è semplicemente:

$$L_{\hat{n}} = I_{\hat{n}}\omega \tag{33}$$

cioè, la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione è il prodotto della velocità angolare per il momento d'inerzia rispetto a quell'asse. Da questa relazione e dalla (22) si comprende l'importanza della definizione e del ruolo del momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Dato un corpo rigido isolato il suo vettore di rotazione passa necessariamente per il centro di massa, di qui la rilevanza del momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa. Tuttavia ci sono casi in cui occorre conoscere il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse qualsiasi, non necessariamente passante per il suo centro di massa. Lo calcoliamo partendo dalla definizione e usando le notazioni di Fig. 4:

$$\begin{aligned} I_b = \sum_i m_i(\vec{r}_i{}' \times \hat{n}) = \sum_i m_i[(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_i) \times \hat{n}]^2 = \\ = M(\vec{R}_{CM} \times \hat{n})^2 + \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \hat{n})^2 - 2(\vec{R}_{CM} \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \sum_i m_i\vec{r}_i) = \\ = M(\vec{R}_{CM} \times \hat{n})^2 + \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \hat{n})^2 = \\ = I_a + M(\vec{R}_{CM} \times \hat{n})^2 \end{aligned} \tag{34}$$

poiché $\sum_i m_i\vec{r}_i) = \vec{O}$ in quanto l'origine degli assi si trova nel centro di massa ed inoltre $\sum_i m_i(\vec{r}_i \times \hat{n})^2$ non è altro che il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse a che è parallelo a b ma passa per il centro di massa.

Questo risultato è noto come "Teorema di Huygens-Steiner": il momento d'inerzia di un corpo di massa M rispetto ad un asse passante per un punto qualunque è dato dal momento d'inerzia rispetto ad un asse ad esso parallelo passante per il centro di massa più il momento d'inerzia di una massa M concentrata nel centro di massa rispetto all'asse dato".

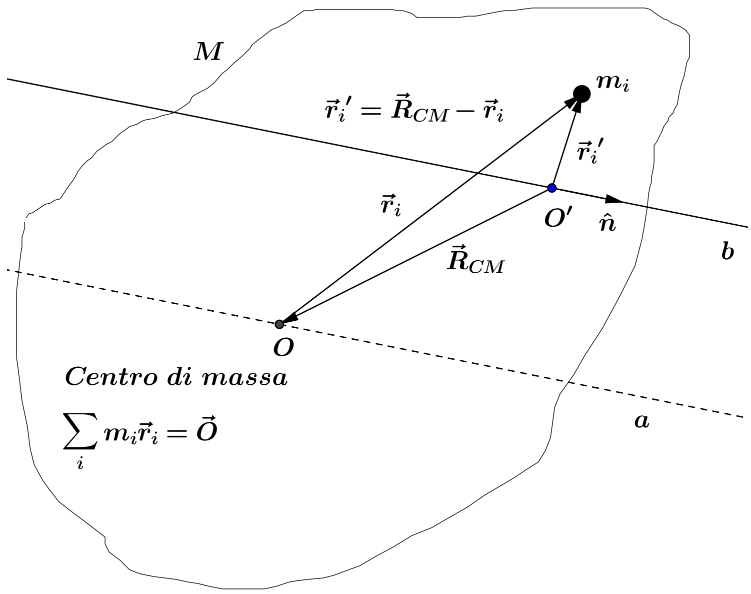


Figure 4: Si deve calcolare il momento d'inerzia di un corpo rigido di massa M rispetto ad un asse b che passa per un generico punto O' e non per il centro di massa. Immaginiamo il corpo formato dalla somma di tante particelle, ciascuna di massa m_i (nel caso di un continuo la sommatoria su tutte le particelle diventa un integrale su tutta la massa del corpo) e partiamo dalla definizione (20) di momento di inerzia rispetto ad un asse, in questo caso l'asse b individuato dal versore $\hat{n}$. L'origine del sistema di riferimento è nel centro di massa del corpo e per esso passa l'asse $a \| b$ (quindi individuato dallo stesso versore $\hat{n}$).

4 Equazioni del moto del corpo rigido attorno al suo centro di massa

Su un corpo rigido che ruota con velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ e che ha momento angolare di rotazione attorno al proprio centro di massa $\vec{L}$ agisce una forza che produce, rispetto al centro di massa, un momento non nullo $\vec{N}$. Se sul copro agiscono più forze, per ognuna di esse si calcola il momento rispetto al centro di massa e quindi si esegue la somma vettoriale dei momenti per ottenere il momento totale.

Nel riferimento inerziale $OXYZ$ con origine nel centro di massa il corpo obbedisce all'equazione del moto:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RI} = \vec{N} \tag{35}$$

dove il simbolo RI indica che la derivata temporale del moneto angolare di rotazione deve essere calcolate nel riferimento inerziale indicato. Usando l'equazione (9) che lega la derivata temporale di ogni vettore nel riferimento inerziale RI a quella nel riferimento non inerziale RNI solidale con il corpo rigido in rotazione $Oxyz$, otteniamo

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{RNI} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N} \quad . \tag{36}$$

Se gli assi coordinati xyz del riferimento solidale con il corpo rigido sono anche gli assi principali di inerzia del corpo, allora il tensore d'inerzia è regolare e vale la relazione (28) e quindi le equazioni del moto del corpo rigido si scrivono nella forma:

$$\begin{aligned} N_x &= I_1\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z(I_2 - I_3) \\ N_y &= I_2\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x(I_3 - I_1) \\ N_z &= I_3\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(I_1 - I_2) \end{aligned} \tag{37}$$

e sono note come “Equazioni di Eulero”.

5 Strategie per il calcolo del momento d’inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse

Il punto cruciale per il calcolo del momento d’inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse è la scelta della massa elementare, e quindi delle variabili su cui integrare per tenere conto del contributo di tutta la massa del corpo rigido al suo momento d’inerzia rispetto all’asse di interesse.

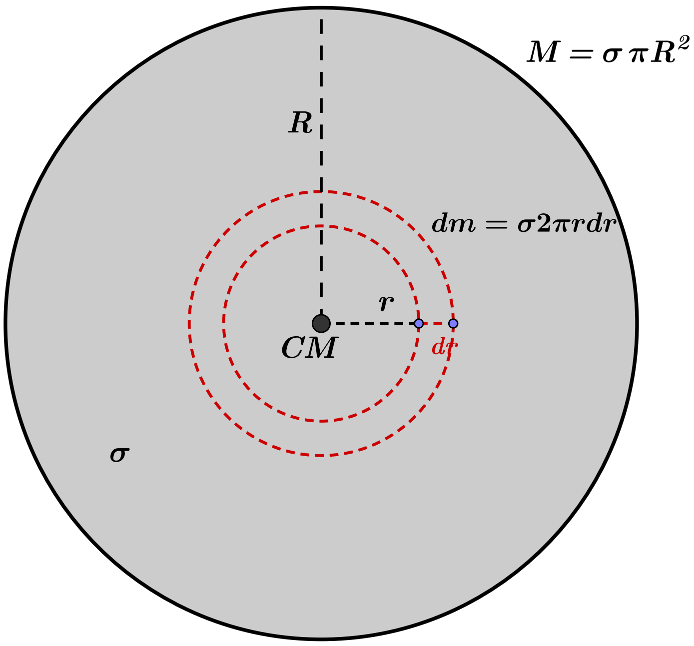


Figure 5: Il disco sottile mostrato in figura ha una densità di massa uniforme σ (in kg/m^2), massa totale M e raggio R. Per calcolare il momento di inerzia rispetto all’asse z (non mostrato in figura) passante per il centro di massa e perpendicolare al piano del disco scegliamo un elemento di massa dm la cui distanza da questo asse è fissa, cioè una corona circolare di raggio $0 \leq r \leq R$ e spessore elementare dr. Moltiplicando la massa elementare dm per la sua distanza al quadrato r^2 dall’asse z e integrando su dr tra zero e il valore R del raggio del disco otteniamo il momento di inerzia di tutto il disco rispetto a questo asse, come mostrato dalla (39).

Un caso istruttivo e molto utile quello di un disco sottile ed omogeneo di massa M e raggio R. Un sistema $Oxyz$ di assi principali di inerzia nel quale il tensore d’inerzia è diagonale è centrato nel centro di mass del disco, asse z perpendicolare al piano del disco e assi x, y qualunque, tra loro ortogonali, nel piano del disco (li posso scegliere a piacere data la simmetria per rotazione attorno all’asse z). Il In questo sistema il tensore d’inerzia da calcolare è:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

essendo I_3 il momento d’inerzia rispetto all’asse z e $I_1 = I_2$ quello rispetto all’asse x o y. Per calcolare I_3 e I_1 usiamo Fig. 5 e Fig. 6 rispettivamente. Da queste figure, con le rispettive didascalie, deduciamo che:

$$I_3 = \int_M r^2 dm = \int_0^R \sigma 2\pi r^3 dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}(\sigma\pi R^2)R^2 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{39}$$

e invece:

$$I_1 = \int_M r^2 \sin^2\vartheta\, dm = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \sigma r^3 dr \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sigma \frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}MR^2 \ . \tag{40}$$

($\int \sin^2\vartheta d\vartheta = \int \cos^2\vartheta d\vartheta = \int \frac{1}{2}(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)d\vartheta = \int \frac{1}{2}d\vartheta$). Osserviamo che $I_3 > I_1$, come c'era da aspettarsi dato che ogni elemento di massa contribuisce al momento di inerzia rispetto ad un dato asse moltiplicato per la sua distanza minima da esso al quadrato, ed è evidente che nel caso dell'asse z c'è più massa del disco lontana da esso che non nel caso degli assi x, y.

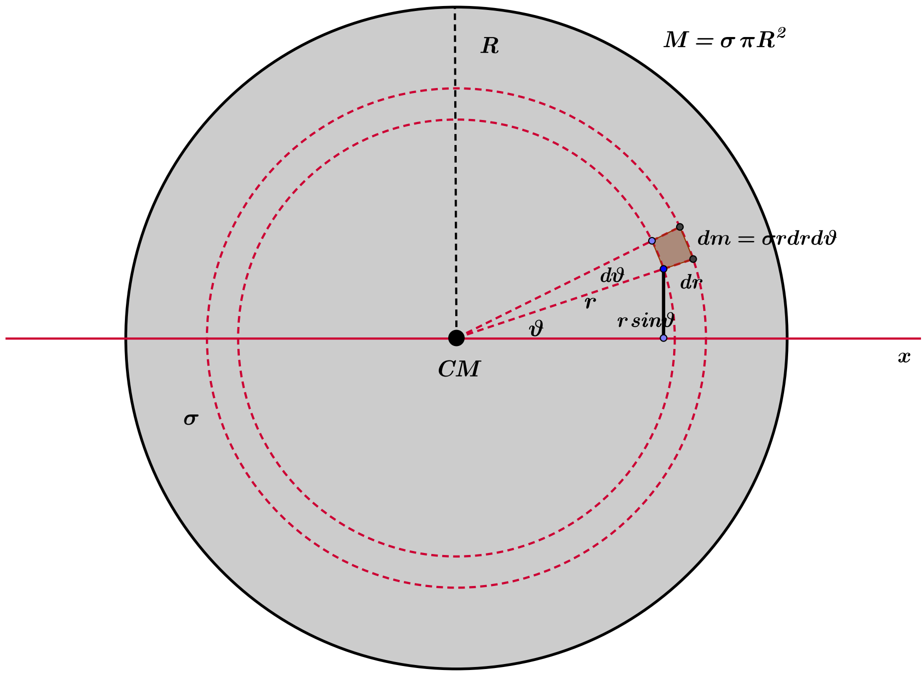


Figure 6: Per lo stesso disco sottile di Fig. 5 dobbiamo calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e giacente nel piano del disco. Data la simmetria del disco per rotazioni nel suo piano attorno al centro di massa, tutti gli assi passanti per il centro di massa e giacenti in questo piano sono indistinguibili l'uno dall'altro. Scegliamo quindi l'asse orizzontale x. In questo caso la massa della corona circolare mostrata si trova a distanza (minima) variabile rispetto all'asse x a seconda dell'angolo ϑ da esso. Scegliamo quindi l'elemento di massa elementare indicato in marrone scuro, dato dalla superficie elementare di lati $rd\vartheta$ e dr la cui massa vale $dm = \sigma r d\vartheta dr$ e la cui distanza minima da x è $r\sin\vartheta$. Quindi in questo caso il momento di inerzia cercato è dato dalla (40).

Passiamo ora al caso generale di un cilindro di massa M, raggio di base R e altezza h, omogeneo con densità $\varrho = M/(\pi R^2 h)$ (in kg/m^3). Il sistema $Oxyz$ degli assi principali di inerzia è centrato nel centro di massa del cilindro e analogo a quello del caso del disco sottile. L'asse z è l'asse di simmetria del cilindro e quindi anche in questo caso sarà $I_1 = I_2$.

Il momento di inerzia I_3 rispetto all'asse di simmetria del cilindro si ottiene scegliendo come massa elementare quella del cilindro formato dalla corona circolare di Fig. 5 per tutta l'altezza h: $dm = \varrho(2\pi r dr)h$ che è simmetrico rispetto all'asse z con distanza minima da esso r. Abbiamo quindi:

$$I_3 = \int_M r^2 dm = \int_0^R \varrho h 2\pi r^3 dr = 2\pi\varrho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\varrho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}(\varrho\pi R^2 h)R^2 = \frac{1}{2}MR^2 \tag{41}$$

che risulta identico a quello calcolato per il disco sottile.

Per lo stesso cilindro calcoliamo ora il momento d'inerzia rispetto all'asse x passante per il suo contro di massa. Se il cilindro si riduce al disco sottile ($h \ll R$) il problema equivale a calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x di Fig. 6. Notiamo che se affettiamo il cilindro in tanti dischi sottili a diverse altezze z dal suo piano centrale, per ognuno di essi possiamo facilmente calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x passante per il centro di massa del cilindro usando il teorema di Huygens-Steiner e il risultato (40) (facendo attenzione alla diversa notazione per l'asse nel piano del disco sottile). Otteniamo:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^{h/2} \frac{1}{4}(\varrho\pi R^2)R^2 dz + 2\int_0^{h/2}(\varrho\pi R^2)z^2 dz = \\ &= \frac{1}{2}\varrho\pi R^4 \int_0^{h/2} dz + 2\varrho\pi R^2 \int_0^{h/2} z^2 dz = \\ &= \frac{1}{4}MR^2 + 2\varrho\pi R^2 \frac{h^3}{24} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2 = \\ &= \frac{1}{12}(3MR^2 + Mh^2) \end{aligned} \tag{42}$$

che è diverso dal risultato (40) ottenuto per il disco sottile e risulta dipendere anche dall'altezza del cilindro.

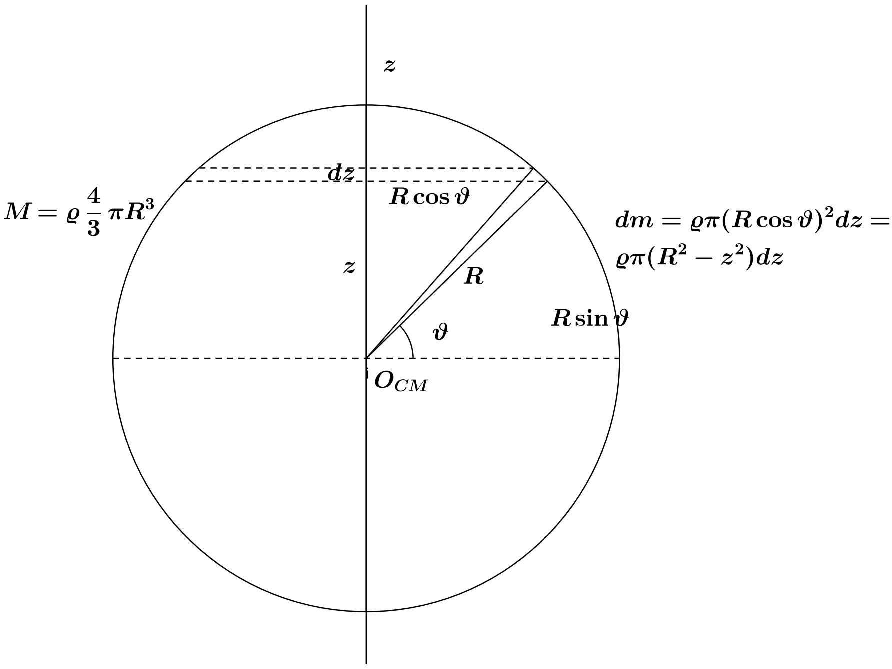


Figure 7: Calcolo del momento di inerzia di una sfera rigida ed omogenea di massa M e raggio R rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa. Data la simmetria rispetto al centro di massa, possiamo scegliere un asse qualunque. Prendiamo l'asse verticale z e come massa elementare quella di un dischetto sottile perpendicolare ad esso di cui conosciamo già il momento di inerzia elementare rispetto a questo asse, che poi integriamo su tutta la massa della sfera. In figura si mostra la sezione della massa elementare del disco sottile in uno degli infiniti piani passanti per l'asse z.

Una sfera rigida ed omogenea è perfettamente simmetrica rispetto al suo centro di massa, quindi qualsiasi terna di assi ortogonali tra loro con origine nel centro di massa costituisce un sistema di assi principali d'inerzia e tutti e tre i momenti d'inerzia rispetto ad essi sono uguali. Per calcolarne il valore scegliamo tra gli infiniti assi passanti per il centro di massa quello verticale z (vedi Fig. 7).

Con i simboli usati in Fig. 7 la massa elementare di ogni disco sottile è $dm = \varrho\pi(R^2 - z^2)dz$ e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z è, come abbiamo già calcolato con la (39), $dI = \frac{1}{2}dm(R^2 - z^2)dz$. Integrando su tutta la sfera abbiamo:

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^R \frac{1}{2}\varrho\pi(R^2 - z^2)^2 dz = \varrho\pi\int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2z^2)dz = \\ = \varrho\pi\Big(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3}\Big) = \pi R^5 \frac{8}{15}\frac{3M}{4\pi R^3} = \\ = \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned} \tag{43}$$

Nel caso in cui il corpo rigido omogeneo abbia la forma di un ellissoide di rotazione, ottenuto cioè dalla rotazione attorno all'asse verticale di una ellisse con semiassi b, c, la figura è quella di uno sferoide oblato (se $b > c$) oppure di uno sferoide prolato (se $b < c$). In ogni caso, la sezione nel piano equatoriale è un cerchio (di raggio b) mentre quella nel piano polare una ellisse. Il sistema degli assi principali di inerzia $Oxyz$ è centrato nel centro di massa, l'asse z è l'asse di simmetria dello sferoide (asse verticale) gli assi x, y sono perpendicolari ad esso, quindi giacciono nel piano equatoriale e sono tra loro perpendicolari (li posso scegliere a piacere, data la simmetria per rotazione attorno all'asse z). I momenti di inerzia rispetto agli assi principali di inerzia dello sferoide, che indichiamo con I_1, I_2, I_3 (rispetto agli assi x, y, z rispettivamente) sono:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2) \qquad I_3 = \frac{2}{5}Mb^2 \quad . \tag{44}$$

Per $b = c$ riotteniamo i tre momenti di inerzia uguali tra loro del caso della sfera. Per $b > c$ si ha $I_3 > I_1 = I_2$, come è da aspettarsi perché nello sferoide oblato si ha più massa all'equatore più lontana dall'asse z. Al contrario, per $b < c$ risulta $I_3 < I_1 = I_2$ dato che si verifica l'opposto.

Se la sezione nel piano equatoriale non è un cerchio di raggio b bensì una ellisse di semiassi a, b diversi tra loro, il corpo rigido non è più un ellissoide di rotazione ma un ellissoide triassiale. Il sistema degli assi principali di inerzia $Ozyz$ è centrato nel centro di massa, asse x lungo il semiasse di lunghezza a, asse y lungo il semiasse di lunghezza b, asse z lungo il semiasse di lunghezza c. I momenti di inerzia rispetto ad essi sono, rispettivamente:

$$I_1 = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2) \qquad I_2 = \frac{1}{5}M(c^2 + a^2) \qquad I_3 = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2) \quad . \tag{45}$$

Nel caso $a = b$ si riottengono i risultati (44) trovati per l'ellissoide di rotazione; nel caso $a = b = c$ si riottiene il momento d'inerzia della sfera dato dalla (43).

6 Moto di un corpo rigido: Terra isolata nello spazio

Consideriamo la Terra come un corpo rigido omogeneo a forma di sferoide oblato, cioè ottenuto ruotando attorno al suo asse minore (asse verticale) una ellisse posta nel piano verticale con semiasse minore R_p (raggio polare) e semiasse maggiore R_e (raggio equatoriale). In questo caso i momenti principali d'inerzia I_1 e I_3 sono dati dalla (44) e siccome la differenza tra raggio equatoriale e raggio polare è piccola la loro differenza $I_3 - I_1$ sarà piccola rispetto al valore di ciascuno di essi.

La Terra è per ipoetsi isolata nello spazio e ruota con velocità angolare di modulo $\omega_\oplus = \frac{2\pi}{86164\,\mathrm{s}} = 7.29\cdot10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$. $P_\oplus = 86164\,\mathrm{s}$ è il periodo di rotazione diurna della Terra rispetto allo spazio inerziale, leggermente minore di $24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$ che è il valore medio del periodo di rotazione diurna della Terra rispetto al Sole. Il vettore di rotazione $\vec{\omega}_\oplus$ non giace esattamente lungo l'asse z dello sferoide, ma ha componenti non nulle nel piano equatoriale, anche se piccole: $\vec{\omega}_\oplus = (\omega_{\oplus x}, \omega_{\oplus y}, \omega_{\oplus z})$ con $\omega_{\oplus z} \gg \omega_{\oplus x}$ e $\omega_{\oplus z} \gg \omega_{\oplus y}$. Ne risulta che il modulo della velocità angolare di rotazione è dato quasi tutto dalla componente z del vettore velocità angolare ($\omega_\oplus \gtrsim \omega_{\oplus z}$), mentre le componenti x, y contribuiscono poco ($\omega_\oplus \gg \omega_{\oplus x}$, $\omega_\oplus \gg \omega_{\oplus y}$); e tuttavia non sono nulle, come mostrato in Fig. 8.

Si chiede di descrivere la dinamica di questo corpo rigido dato che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare a prima vista, pur essendo isolato e quindi non soggetto ad alcuna forza (e quindi ad alcun momento) esso non resta nella configurazione iniziale.

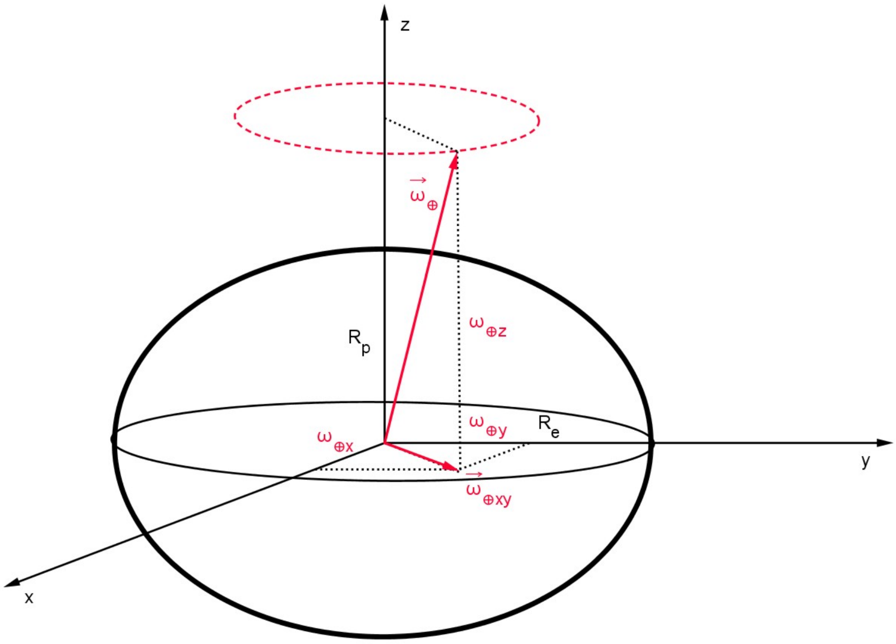


Figure 8: In prima approssimazione la terra può essere rappresentata come un corpo rigido a forma di sferoide oblato, cioè simmetrico attorno all'asse polare e con raggio equatoriale maggiore del raggio polare. È un fatto però che l'asse di rotazione diurna della Terra non coincide esattamente con il suo asse di simmetria, ma è leggermente inclinato rispetto ad esso. In figura questa inclinazione viene esagerata rispetto alla realtà per renderla evidente.

Le equazioni di Eulero (37) in questo caso in cui i momenti applicati sono nulli e $I_1 = I_2$ sono:

$$\begin{aligned} 0 =& I_1 \dot{\omega}_{\oplus x} - \omega_{\oplus y}\omega_{\oplus z}(I_1 - I_3) \\ 0 =& I_1 \dot{\omega}_{\oplus y} - \omega_{\oplus z}\omega_{\oplus x}(I_3 - I_1) \\ 0 =& I_3 \dot{\omega}_{\oplus z} \end{aligned} \tag{46}$$

e dalla terza (poiché è certamente $I_3 \neq 0$) concludiamo che deve essere $\dot{\omega}_{\oplus z} = 0$ e quindi $\omega_{\oplus z}$ è costante, cioè il periodo di rotazione attorno all'asse z non varia. Tenendo conto di questo fatto riscriviamo le prime due equazioni (46) nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\oplus x} =& \Omega \omega_{\oplus y} \\ \dot{\omega}_{\oplus y} =& -\Omega \omega_{\oplus x} \end{aligned} \tag{47}$$

dove:

$$\Omega = \omega_{\oplus z} \frac{I_1 - I_3}{I_1} \tag{48}$$

ha le dimensioni di una velocità angolare ed è (in modulo) molto minore di $\omega_{\oplus z}$ perchè $|\frac{I_1 - I_3}{I_1}| \ll 1$

Per integrare le equazioni differenziali di primo ordine (47) nelle variabili $\omega_{\oplus x}, \omega_{\oplus y}$ cerchiamo di trasformarle in due equazioni in cui le variabili sono separate. Dalle (47), passando ad equazioni differenziali del secondo ordine, otteniamo due equazioni distinte una per $\omega_{\oplus x}$ e una per $\omega_{\oplus y}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_{\oplus x} =& -\Omega^2 \omega_{\oplus x} \\ \ddot{\omega}_{\oplus y} =& -\Omega^2 \omega_{\oplus y} \quad . \end{aligned} \tag{49}$$

Ciascuna di esse è l'equazione di un oscillatore armonico a frequenza angolare Ω: la componente x del vettore velocità angolare della Terra oscilla lungo l'asse principale di inerzia x con frequenza angolare Ω e lo steso accade per la componente y lungo l'asse principale d'inerzia y. Poiché la frequenza angolare è la stessa nelle due direzioni la combinazione di questi due moti oscillatori è un moto circolare del vettore $\vec{\omega}_{xy}$ indicato in Fig. 8. Per il vettore velocità angolare della Terra $\vec{\omega}_{\oplus}$ questo significa un moto di precessione a velocità angolare (detta appunto di precessione) Ω come mostrato in Fig. 8, cioè l'asse di rotazione della Terra si muove dentro la Terra compiendo questo moto di precessione. Poiché $\Omega < 0$ (dato che $I_1 < I_3$), e la velocità angolare di rotazione della Terra è positiva (cioè in senso antiorario), la precessione ha segno negativo (senso orario), quindi il moto di precessione avviene in verso opposto a quello della rotazione diurna. Il periodo di questa precessione (detta precessione libera perché avviene in assenza di momenti di forza esterni) è $P = 2\pi/|\Omega|$ ed è più lungo del periodo di rotazione diurna di una fattore $I_1/(I_3 - I_1)$ che per la Terra vale circa 300. In realtà, la Terra non è proprio un corpo rigido e il suo periodo di precessione libera non è di circa 430 giorni.

7 Periodo delle piccole oscillazioni di un corpo rigido sospeso

Consideriamo un cilindro rigido omogeneo di massa M, raggio di base R e altezza $2h$ sospeso in laboratorio ad una estremità lungo il suo asse di simmetria con un filo sottile di lunghezza trascurabile rispetto ad h e ad R che gli permette di oscillare, a causa della forza gravitazionale locale, se il suo asse di simmetria viene spostato dalla direzione verticale e poi rilasciato.

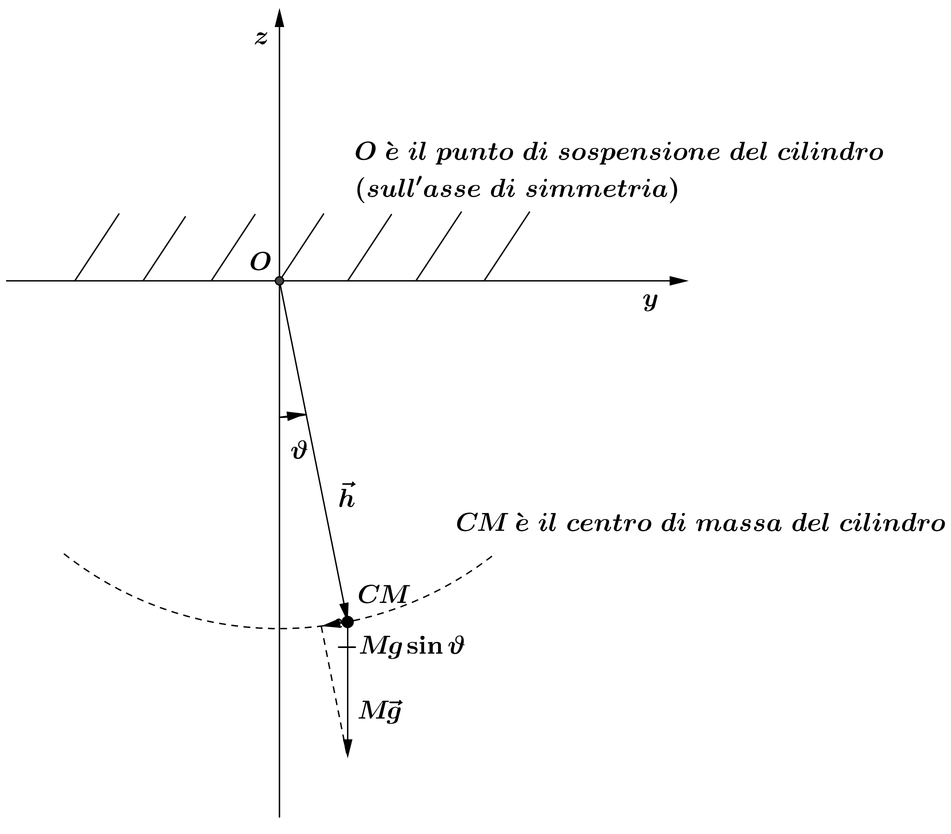


Figure 9: Si mostra il centro di massa del cilindro descritto nel testo quando il suo asse di simmetria è inclinato di un angolo ϑ (positivo) rispetto alla verticale locale z. Il cilindro (che non viene mostrato) è sospeso nel punto O (tramite un filo o una lamella flessibili) in modo da poter oscillare se il suo asse di simmetria non è allineato lungo la verticale. La forza gravitazionale produce un momento rispetto al punto di sospensione O diretto lungo l'asse x, il terzo della terna, non mostrato in figura (e di segno negativo nella posizione descritta).

In Fig. 9 si mostra il centro di massa del cilindro quando il suo asse di simmetria si trova spostato di un angolo $\vartheta > 0$ dalla verticale locale (diretta lungo l'asse z). Il momento rispetto al punto di sospensione O esercitato dalla forza peso è:

$$\vec{N}_O = \vec{h} \times (M\vec{g}) \tag{50}$$

che è diretto lungo l'asse x ed è negativo:

$$N_O = -Mgh \sin\vartheta \quad . \tag{51}$$

Per la legge fondamentale di Newton relativa al moto del corpo rigiro (35) deve essere:

$$\dot{L}_O = -Mgh \sin\vartheta \tag{52}$$

dove L_O è il momento angolare di rotazione del cilindro lungo l'asse x attorno al punto di sospensione, dato dal prodotto del momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse x passante per O, I_O, moltiplicato per la sua velocità angolare (istantanea) di rotazione rispetto a quell'asse, $\dot{\vartheta}$:

$$L_O = I_O \dot{\vartheta} \tag{53}$$

e quindi l'equazione del moto è:

$$I_O \ddot{\vartheta} = -Mgh \sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \frac{Mgh}{I_O} \sin\vartheta = 0 \tag{54}$$

che per piccole oscillazioni ($\sin\vartheta \simeq \vartheta$) diventa:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0 \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I_O}}\right) \tag{55}$$

dove $P = 2\pi/\omega$ è il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo che, come nel caso del pendolo semplice (punto massa sospeso ad un filo) non dipende dall'ampiezza di queste piccole oscillazioni.

Per calcolare I_O usiamo la (42) e quindi il teorema di Huygens-Steiner (tenendo conto che il cilindro in questo caso ha altezza $2h$) e otteniamo:

$$I_0 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{3}Mh^2 + Mh^2 = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{4}{3}Mh^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{gh}{\frac{1}{4}R^2 + \frac{4}{3}h^2}} \quad . \tag{56}$$

Si noti che anche nel caso del corpo rigido la frequenza (e quindi il periodo) di oscillazione del pendolo non dipende dalla massa del corpo.