

# Fisica 1, a.a. 2014-2015: Oscillatore armonico

Anna M. Nobili

## 1 Oscillatore armonico in una dimensione senza dissipazione e in assenza di forze esterne

Ad una molla di massa trascurabile, costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $\ell_0$  è collegata una massa puntiforme  $m$ . Quando la molla è a riposo la massa puntiforme si trova nell'origine  $O$  di un sistema di riferimento inerziale  $Oxyz$ . La molla si può allungare (o contrarre) lungo una direzione, che assumiamo essere quella dell'asse  $x$  (asse di sensibilità). Quando la molla è a riposo, sulla massa  $m$  non agisce alcuna forza (posizione di equilibrio). Se la massa  $m$  viene allontanata dalla posizione di equilibrio lungo l'asse di sensibilità della molla provocandone un allungamento della quantità  $x$ , la molla esercita su di essa una forza di richiamo proporzionale all'entità dell'allungamento, come mostrato in Fig. 1 (legge di Hook):

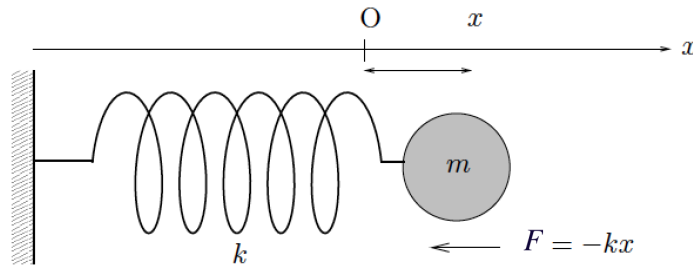


Figure 1: Oscillatore armonico unidimensionale di massa  $m$  e costante elastica  $k$ . La forza di richiamo  $F = -k(x - \ell_0)$  diventa  $F = -kx$  poiché si è posta l'origine nella posizione di equilibrio.

$$F(x) = -kx \quad . \quad (1)$$

La costante di proporzionalità  $k$  è la costante elastica della molla (definita positiva) e ha le dimensioni fisiche di  $\text{Nm}^{-1}$ . Se la massa viene spostata in direzione opposta della stessa quantità, la molla viene contratta e di nuovo richiama la massa verso la posizione di equilibrio. È evidente che sotto l'azione di questa forza la massa  $m$  oscilla lungo l'asse  $x$  intorno alla posizione di equilibrio (l'origine in questo caso). Per questo il sistema si chiama *oscillatore armonico*.

L'equazione del moto della massa  $m$  è:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2)$$

dove:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

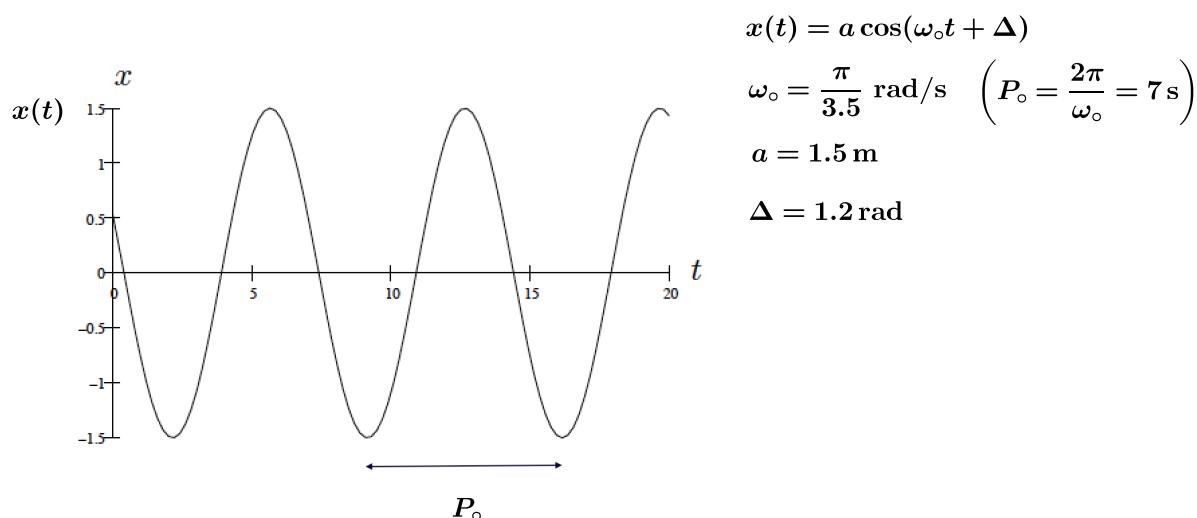


Figure 2: Plot della legge oraria  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \Delta)$  nel caso in cui frequenza angolare (periodo), ampiezza e fase abbiano i valori indicati in figura

che ha le dimensioni fisiche di rad/s, è la frequenza angolare naturale di oscillazione della massa  $m$  collegata alla molla di costante elastica  $k$ . Il periodo naturale di oscillazione è  $P_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  e si misura in secondi, e la frequenza di oscillazione (numero di oscillazioni in 1 s) è  $\nu_0 = \frac{1}{P_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$  e si misura in Hz cioè  $\text{s}^{-1}$ . L'aggettivo *naturale* indica che si tratta di una proprietà intrinseca dell'oscillatore, in quanto dipende solo dalla sua massa e dalla costante elastica di richiamo della molla, e non dalle particolari condizioni iniziali con le quali viene messo in oscillazione.

Sappiamo (o possiamo facilmente verificare) che le funzioni  $\cos(\omega_0 t)$  e  $\sin(\omega_0 t)$  sono entrambi soluzioni della (2) e quindi, siccome l'equazione è lineare, la soluzione più generale sarà data da una combinazione lineare delle due:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

Trattandosi di una equazione differenziale del secondo ordine, ci saranno due costanti additive, che sono individuate dalle condizioni iniziali (posizione e velocità all'istante iniziale). Scriviamo quindi anche  $\dot{x}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (5)$$

e date le condizioni iniziali:

$$x(t=0) = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = v_{x_0} \quad (6)$$

imponiamo che esse siano soddisfatte:

$$x(t=0) = A = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = B\omega_0 = v_{x_0} \quad (7)$$

Possiamo quindi scrivere la soluzione generale (4) che rispetta le condizioni iniziali date:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_{x_0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (8)$$

Un altro modo di scrivere la soluzione generale dell'equazione del moto (2), è:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \Delta) \quad (9)$$

dove  $a > 0$  è l'ampiezza della oscillazione espressa dalla funzione coseno e  $\Delta$ , che è un angolo, è la fase dell'oscillazione al tempo  $t = 0$  (al tempo  $t = 0$  il coseno vale 1 se l'angolo di fase è nullo; nel caso (9) vale invece  $\cos \Delta$ ). Queste due grandezze (ampiezza dell'oscillazione e fase iniziale) si possono ricavare dalle condizioni iniziali (6). Abbiamo quindi bisogno anche della derivata prima della (9):

$$\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \Delta) \quad (10)$$

e imponendo:

$$x(t=0) = a \cos \Delta = x_0 \quad \dot{x}(t=0) = -a\omega_0 \sin \Delta = v_{x0} \quad (11)$$

otteniamo:

$$\cos \Delta = \frac{x_0}{a} \quad , \quad \sin \Delta = -\frac{v_{x0}}{a\omega_0} \quad (12)$$

e infine:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_0^2}} \quad , \quad \tan \Delta = -\frac{v_{x0}}{x_0\omega_0} \quad (13)$$

(si noti che non c'è indeterminazione di  $\pi$  nella fase  $\Delta$ , come potrebbe apparire a prima vista per il fatto che abbiamo  $\tan \Delta$ , perché i segni di  $\cos \Delta$  e  $\sin \Delta$  sono noti individualmente dalle condizioni iniziali) che danno in modo univoco la soluzione generale (9).

Poiché la forza elastica è conservativa ne calcoliamo l'energia potenziale, partendo dalla definizione:

$$U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} \quad (14)$$

dove  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  è il lavoro compiuto dalla forza in questione per andare dal punto  $\mathcal{A}$  al punto  $\mathcal{B}$ . Come punto di riferimento rispetto al quale calcolare l'energia potenziale di ogni altro punto scegliamo il punto  $x = 0$ , poiché essendo il punto nel quale la molla ha allungamento nullo, l'energia potenziale è nulla. Abbiamo quindi:

$$U(x) = -\mathcal{L}_{0 \rightarrow x} = -\int_0^x (-kx') dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2} kx^2 \quad . \quad (15)$$

Infine, possiamo calcolare l'energia totale dell'oscillatore armonico, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. La funzione energia totale, funzione delle variabili  $x(t), \dot{x}(t)$  è:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad . \quad (16)$$

Usando la soluzione (9) per  $x(t)$  e la (10) per  $\dot{x}(t)$  otteniamo:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \Delta) \quad (17)$$

e per la (3):

$$E = \frac{1}{2} ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \Delta) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \quad (18)$$

che è ovviamente costante e risulta proporzionale all'ampiezza di oscillazione al quadrato.

## 2 Oscillatore armonico in una dimensione con dissipazione e in assenza di forze esterne

L'oscillatore armonico studiato nella sezione precedente è ora in presenza di una forza dissipativa diretta nella direzione del moto (frenante) e proporzionale in ogni istante alla velocità dell'oscillatore:

$$F_{diss} = -\beta\dot{x} \quad , \quad \beta > 0 \quad (19)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di attrito ed ha le dimensioni fisiche  $Nm^{-1}s$ .

L'equazione del moto dell'oscillatore armonico smorzato è:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (20)$$

dove  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  è la frequenza naturale dell'oscillatore non smorzato definita nella sezione precedente e

$$\lambda = \frac{\beta}{m} \quad (21)$$

ha le dimensioni fisiche dell'inverso di un tempo (che poi sono le stesse dimensioni di una frequenza angolare dato che gli angoli sono adimensionali).

Risolviamo l'equazione del moto (20) passando alla variabile complessa  $z = x + iy$ :

$$\ddot{z} + \lambda\dot{z} + \omega_0^2z = 0 \quad (22)$$

per la quale cerchiamo una soluzione complessa del tipo

$$\zeta = \alpha e^{\sigma t} \quad \text{con} \quad \alpha = a e^{i\Delta} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad a, \Delta \in \mathbb{R} \quad . \quad (23)$$

Quando avremo trovato la soluzione complessa, la sua parte reale sarà la soluzione dell'equazione del moto (20) da cui siamo partiti. Imponendo la soluzione  $\zeta$ , e ricordando le regole di derivazione delle potenze  $\frac{d}{dt}e^{\sigma t} = \sigma e^{\sigma t}$  e  $\frac{d^2}{dt^2}e^{\sigma t} = \sigma^2 e^{\sigma t}$ , dalla (22) otteniamo:

$$(\sigma^2 + \lambda\sigma + \omega_0^2)\alpha e^{\sigma t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 + \lambda\sigma + \omega_0^2 = 0 \quad . \quad (24)$$

Si tratta di una equazione algebrica di secondo grado le cui due soluzioni sono:

$$\sigma_{\pm} = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega_0^2} \quad . \quad (25)$$

Se il discriminante (l'espressione sotto la radice quadrata) è negativo le due soluzioni  $\sigma_{\pm}$  hanno una parte immaginaria che, per la definizione (23) significa che ci sarà un moto oscillatorio. Se invece il discriminante è positivo, la radice quadrata è reale e poiché anche  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le due soluzioni  $\sigma_{\pm}$  sono entrambe reali e quindi non ci sarà moto oscillatorio.

Consideriamo il caso  $\lambda < 2\omega_0$  (discriminante negativo). Le due soluzioni della (25) sono:

$$\sigma_{\pm} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}} = -\gamma \pm i\omega \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\lambda}{2} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \leq \omega_0 \quad (26)$$

( $\omega, \omega_0$  sono frequenze angolari;  $\gamma, \lambda$  hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo) che danno le soluzioni cercate (23) del tipo:

$$\zeta_{\pm} = \alpha e^{(-\gamma \pm i\omega)t} = a e^{i\Delta} e^{(-\gamma \pm i\omega)t} = a e^{-\gamma t} e^{i(\pm\omega t + \Delta)} \quad . \quad (27)$$

Ricordando l'equazione fondamentale  $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , scriviamo:

$$\zeta_{\pm} = ae^{-\gamma t}(\cos(\pm\omega t + \Delta) + i \sin(\pm\omega t + \Delta)) \quad (28)$$

dalla quale deduciamo facilmente che l'equazione del moto reale (20) da cui siamo partiti ha, nel caso  $\lambda < 2\omega_0$  le due soluzioni reali:

$$x_{\pm} = ae^{-\gamma t} \cos(\pm\omega t + \Delta) \quad \left( \gamma = \frac{\lambda}{2} = \frac{\beta}{2m} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \leq \omega_0 \right) . \quad (29)$$

Si tratta di un oscillatore con periodo di oscillazione  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  maggiore del periodo naturale di oscillazione in assenza di smorzamento e la cui ampiezza di oscillazione decresce esponenzialmente nel tempo riducendosi di un fattore  $1/e$  del suo valore dopo ogni  $1/\gamma$  secondi. Si dice che  $1/\gamma$  è la costante di tempo del decadimento esponenziale dell'ampiezza di oscillazione. Più piccolo è il valore di  $\gamma = \frac{\beta}{2m}$ , cioè più piccolo è il coefficiente di attrito (per un dato oscillatore di massa  $m$ ) più grande è la costante di tempo di decadimento delle sue oscillazioni, cioè più lentamente si smorzano le sue oscillazioni. Inoltre, più piccolo è  $\gamma$ , più la frequenza di oscillazione sarà vicina a (appena più piccola di) quella naturale  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  dell'oscillatore dato con massa  $m$  e costante elastica  $k$ , più il periodo di oscillazione sarà vicino a (appena più grande di) quello naturale in assenza di attrito.

Il segno  $\pm\omega t$  dentro il coseno significa che l'angolo  $\omega t$  per  $t > 0$  è positivo in un caso (percorso in senso antiorario) e negativo nell'altro (percorso in senso orario). Nel caso particolare in cui  $\Delta = 0$  le due soluzioni coincidono, perché per la funzione coseno vale  $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ , ma in generale per un angolo di fase non nullo le due soluzioni sono distinte.

Provate a fare il plot per un numero intero di periodi di oscillazione per una soluzione del tipo  $x(t) = ae^{-\gamma t} \cos \omega t$  nel caso particolare  $\gamma = \frac{\omega}{2\pi}$ . Disegnate la parte oscillante tenendo conto che la sua ampiezza decresce esponenzialmente nel tempo riducendosi di  $1/e$  dopo ogni intervallo di tempo pari al periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  delle oscillazioni. In questo caso particolare è semplice disegnare il decadimento esponenziale dell'ampiezza delle oscillazioni.

Questo oscillatore, con equazione del moto (20) e con  $\gamma < \omega_0$  è detto *oscillatore armonico sottosmorzato*.

Consideriamo ora il caso  $\lambda > 2\omega_0$ , cioè  $\gamma > \omega_0$  (discriminante positivo). In questo caso le soluzioni sono entrambe reali ed entrambe negative:

$$\sigma_{\pm} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega_0^2} < 0 . \quad (30)$$

La soluzione generale sarà quindi la combinazione lineare di due esponenziali decrescenti. L'ampiezza  $x(t)$  cresce per un po', raggiunge un massimo e poi si tende esponenzialmente a zero.

Questo oscillatore è detto *sovrasmorzato*.

L'ultimo caso è quello in cui il discriminante è nullo, il che avviene nel caso particolare  $\lambda = 2\omega_0$ . In questo caso le due soluzioni coincidono e sono entrambe reali. Questo è il caso particolare di un oscillatore con *smorzamento critico*: il coefficiente di attrito diviso per la massa dell'oscillatore è esattamente uguale al doppio della frequenza angolare naturale dell'oscillatore stesso in assenza di smorzamento,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Il comportamento è simile a quello di un oscillatore sovrasmorzato