# Fisica 1, a.a. 2014-2015: Oscillatore armonico

Anna M. Nobili

## 1 Oscillatore armonico in una dimensione senza dissipazione e in assenza di forze esterne

Ad una molla di massa trascurabile, costante elastica $k$ e lunghezza a riposo $\ell_\circ$ è collegata una massa puntiforme $m$. Quando la molla è a riposo la massa puntiforme si trova nell'origine $O$ di un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$. La molla si può allungare (o contrarre) lungo una direzione, che assumiamo essere quella dell'asse $x$ (asse di sensibilità). Quando la molla è a riposo, sulla massa $m$ non agisce alcuna forza (posizione di equilibrio). Se la massa $m$ viene allontanata dalla posizione di equilibrio lungo l'asse di sensibilità della molla provocandone un allungamento della quantità $x$, la molla esercita su di essa una forza di richiamo proporzionale all'entità dell'allungamento, come mostrato in Fig. 1 (legge di Hook):

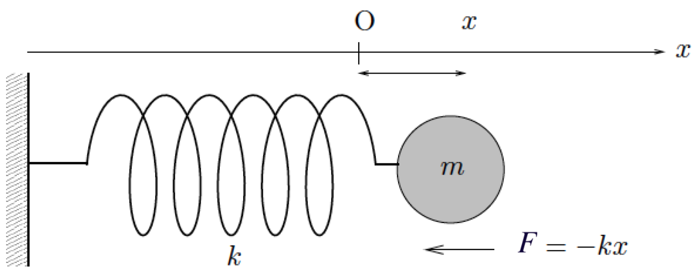



Figure 1: Oscillatore armonico unidimensionale di massa $m$ e costante elastica $k$. La forza di richiamo $F = -k(x - \ell_\circ)$ diventa $F = -kx$ poiché si è posta l'origine nella posizione di equilibrio.

$$F(x) = -kx \quad . \tag{1}$$

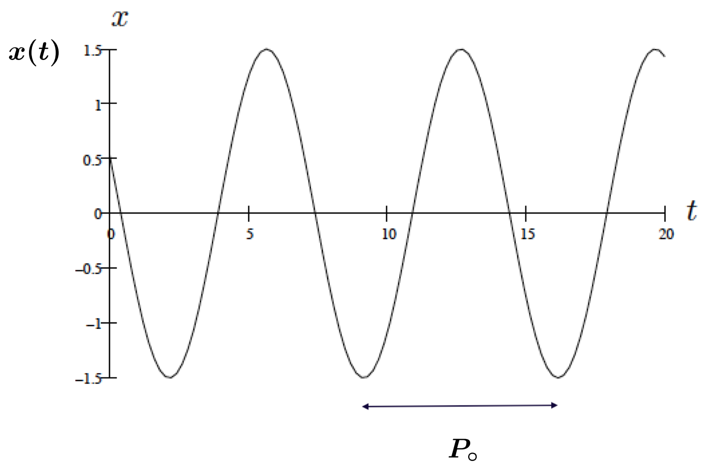
La costante di proporzionalità $k$ è la costante elastica della molla (definita positiva) e ha le dimensioni fisiche di $\mathrm{Nm}^{-1}$. Se la massa viene spostata in direzione opposta della stessa quantità, la molla viene contratta e di nuovo richiama la massa verso la posizione di equilibrio. È evidente che sotto l'azione di questa forza la massa $m$ oscilla lungo l'asse $x$ intorno alla posizione di equilibrio (l'origine pin questo caso). Per questo il sistema si chiama *oscillatore armonico.*

L'equazione del moto della massa $m$ è:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \omega_\circ^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

dove:

$$\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$




$$\boldsymbol{x(t) = a\cos(\omega_\circ t + \Delta)}$$

$$\boldsymbol{\omega_\circ = \frac{\pi}{3.5}\ \mathrm{rad/s} \quad \left(P_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ} = 7\,\mathrm{s}\right)}$$

$$\boldsymbol{a = 1.5\,\mathrm{m}}$$

$$\boldsymbol{\Delta = 1.2\,\mathrm{rad}}$$

Figure 2: Plot della legge oraria $x(t) = a\cos(\omega_\circ t+\Delta)$ nel caso in cui frequenza angolare (periodo), ampiezza e fase abbiano i valori indicati in figura

che ha le dimensioni fisiche di rad/s, è la frequenza angolare naturale di oscillazione della massa $m$ collegata alla molla di costante elastica $k$. Il periodo naturale di oscillazione è $P_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ}$ e si misura in secondi, e la frequenza di oscillazione (numero di oscillazioni in 1 s) è $\nu_\circ = \frac{1}{P_\circ} = \frac{\omega_\circ}{2\pi}$ e si misura in Hz cioè $\mathrm{s}^{-1}$. L'aggettivo *naturale* indica che si tratta di una proprietà intrinseca dell'oscillatore, in quanto dipende solo dalla sua massa e dalla costante elastica di richiamo della molla, e non dalle particolari condizioni iniziali con le quali viene messo in oscillazione.

Sappiamo (o possiamo facilmente verificare) che le funzioni $\cos(\omega_\circ t)$ e $\sin(\omega_\circ t)$ sono entrambi soluzioni della (2) e quindi, siccome l'equazione è lineare, la soluzione più generale sarà data da una combinazione lineare delle due:

$$x(t) = A\cos(\omega_\circ t) + B\sin(\omega_\circ t) \tag{4}$$

Trattandosi di una equazione differenziale del secondo ordine, ci saranno due costanti additive, che sono individuate dalle condizioni iniziali (posizione e velocità all'istante iniziale). Scriviamo quindi anche $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = -A\omega_\circ \sin(\omega_\circ t) + B\omega_\circ \cos(\omega_\circ t) \tag{5}$$

e date le condizioni iniziali:

$$x(t=0) = x_\circ \qquad \dot{x}(t=0) = v_{x\circ} \tag{6}$$

imponiamo che esse siano soddisfatte:

$$x(t=0) = A = x_\circ \qquad \dot{x}(t=0) = B\omega_\circ = v_{x\circ} \quad . \tag{7}$$

Possiamo quindi scrivere la soluzione generale (4) che rispetta le condizioni iniziali date:

$$x(t) = x_\circ \cos(\omega_\circ t) + \frac{v_{x\circ}}{\omega_\circ}\sin(\omega_\circ t) \quad . \tag{8}$$

Un altro modo di scrivere la soluzione generale dell'equazione del moto (2), è:

$$x(t) = a\cos(\omega_\circ t + \Delta) \tag{9}$$

dove $a > 0$ è l'ampiezza della oscillazione espressa dalla funzione coseno e $\Delta$, che è un angolo, è la fase dell'oscillazione al tempo $t = 0$ (al tempo $t = 0$ il coseno vale 1 se l'angolo di fase è nullo; nel caso (9) vale invece $\cos\Delta$). Queste due grandezze (ampiezza dell'oscillazione e fase iniziale) si possono ricavare dalle condizioni iniziali (6). Abbiamo quindi bisogno anche della derivata prima della (9):

$$\dot{x}(t) = -a\omega_\circ \sin(\omega_\circ t + \Delta) \tag{10}$$

e imponendo:

$$x(t=0) = a\cos\Delta = x_\circ \qquad \dot{x}(t=0) = -a\omega_\circ \sin\Delta = v_{x\circ} \tag{11}$$

otteniamo:

$$\cos\Delta = \frac{x_\circ}{a} \quad , \quad \sin\Delta = -\frac{v_{x\circ}}{a\omega_\circ} \tag{12}$$

e infine:

$$a = \sqrt{x_\circ^2 + \frac{v_{x\circ}^2}{\omega_\circ^2}} \quad , \quad \tan\Delta = -\frac{v_{x\circ}}{x_\circ\omega_\circ} \tag{13}$$

(si noti che non c'è indeterminazione di $\pi$ nella fase $\Delta$, come potrebbe apparire a prima vista per il fatto che abbiamo$\tan\Delta$, perché i segni di $\cos\Delta$ e $\sin\Delta$ sono noti individualmente dalle condizioni iniziali) che danno in modo univoco la soluzione generale (9).

Poiché la forza elastica è conservativa ne calcoliamo l'energia potenziale, partendo dalla definizione:

$$U(B) - U(A) = -\mathcal{L}_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} \tag{14}$$

dove $\mathcal{L}_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ è il lavoro compiuto dalla forza in questione per andare dal punto $\mathcal{A}$ al punto $\mathcal{B}$. Come punto di riferimento rispetto al quale calcolare l'energia potenziale di ogni altro punto scegliamo il punto $x = 0$, poiché essendo il punto nel quale la molla ha allungamento nullo, l'energia potenziale è nulla. Abbiamo quindi:

$$U(x) = -\mathcal{L}_{0\to x} = -\int_0^x (-kx')dx' = k\int_0^x x'dx' = \frac{1}{2}kx^2 \quad . \tag{15}$$

Infine, possiamo calcolare l'energia totale dell'oscillatore armonico, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. La funzione energia totale, funzione delle variabili $x(t), \dot{x}(t)$ è:

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad . \tag{16}$$

Usando la soluzione (9) per $x(t)$ e la (10) per $\dot{x}(t)$ otteniamo:

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}ma^2\omega_\circ^2\sin^2(\omega_\circ t + \Delta) + \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_\circ t + \Delta) \tag{17}$$

e per la (3):

$$E = \frac{1}{2}ma^2\omega_\circ^2\sin^2(\omega_\circ t + \Delta) + \frac{1}{2}m\omega_\circ^2a^2\cos^2(\omega_\circ t + \Delta) = \frac{1}{2}m\omega_\circ^2a^2 \tag{18}$$

che è ovviamente costante e risulta proporzionale all'ampiezza di oscillazione al quadrato.

## 2 Oscillatore armonico in una dimensione con dissipazione in assenza di forze esterne

L'oscillatore armonico studiato nella sezione precedente è ora in presenza di una forza dissipativa diretta nella direzione del moto (frenante) e proporzionale in ogni istante alla velocità dell'oscillatore:

$$F_{diss} = -\beta \dot{x} \quad , \quad \beta > 0 \tag{19}$$

dove $\beta$ è il coefficiente di attrito ed ha le dimensioni fisiche $Nm^{-1}s$.

L'equazione del moto dell'oscillatore armonico smorzato è:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_\circ^2 x = 0 \tag{20}$$

dove $\omega_\circ^2 = \frac{k}{m}$ è la frequenza naturale dell'oscillatore non smorzato definita nella sezione precedente e

$$\lambda = \frac{\beta}{m} \tag{21}$$

ha le dimensioni fisiche dell'inverso di un tempo (che poi sono le stesse dimensioni di una frequenza angolare dato che gli angoli sono adimensionali).

Risolviamo l'equazione del moto (20) passando alla variabile complessa $z = x + iy$:

$$\ddot{z} + \lambda\dot{z} + \omega_\circ^2 z = 0 \tag{22}$$

per la quale cerchiamo una soluzione complessa del tipo

$$z = \alpha e^{\sigma t} \quad \text{con} \quad \alpha = a e^{i\Delta} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \qquad a, \Delta \in \mathbb{R} \quad . \tag{23}$$

Nota: per comodità indichiamo la soluzione cercata con lo stesso simbolo $z$ della variabile dell'equazione differenziale (22).

Quando avremo trovato la soluzione complessa, la sua parte reale sarà la soluzione dell'equazione del moto (20) da cui siamo partiti. Imponendo la soluzione (8), e ricordando le regole di derivazione delle potenze (cioè $\frac{d}{dt}e^{\sigma t} = \sigma e^{\sigma t}$ e $\frac{d^2}{dt^2}e^{\sigma t} = \sigma^2 e^{\sigma t}$), dalla (22) otteniamo:

$$(\sigma^2 + \lambda\sigma + \omega_\circ^2)\alpha e^{\sigma t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 + \lambda\sigma + \omega_\circ^2 = 0 \ . \tag{24}$$

Si tratta di una equazione algebrica di secondo grado le cui due soluzioni sono:

$$\sigma_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_\circ^2} \tag{25}$$

avendo definito:

$$\gamma \equiv \frac{\lambda}{2} \quad . \tag{26}$$

Se il discriminante (l'espressione sotto la radice quadrata) è negativo le due soluzioni $\sigma_\pm$ hanno una parte immaginaria che, per la definizione (23) significa che ci sarà un moto oscillatorio. Se invece il discriminante è positivo, la radice quadrata è reale e poiché anche $\lambda \in \mathbb{R}$, le due soluzioni $\sigma_\pm$ sono entrambe reali e quindi non c'è moto oscillatorio.

- Caso $\gamma < \omega_\circ$, quindi discriminante negativo. Le due soluzioni della (25) sono:

$$\sigma_\pm = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_\circ^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm \omega \quad \text{con} \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_\circ^2 - \gamma^2} \leq \omega_\circ \tag{27}$$

($\omega, \omega_\circ$ sono frequenze angolari; $\gamma, \lambda$ hanno le dimensioni dell'inverso di un tempo) che danno le soluzioni cercate (23) del tipo:

$$z_\pm = \alpha e^{(-\gamma \pm i\omega)t} = a e^{i\Delta} e^{(-\gamma \pm i\omega)t} = a e^{-\gamma t} e^{i(\pm\omega t + \Delta)} \quad . \tag{28}$$

Ricordando l'equazione fondamentale di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, scriviamo:

$$z_\pm = a e^{-\gamma t}(\cos(\pm\omega t + \Delta) + i\sin(\pm\omega t + \Delta)) \tag{29}$$

dalla quale deduciamo facilmente che l'equazione del moto reale (20) da cui siamo partiti ha, in questo caso $\gamma < \omega_\circ$ le due soluzioni reali:

$$x_\pm = a e^{-\gamma t} \cos(\pm\omega t + \Delta) \qquad \left(\gamma = \frac{\lambda}{2} = \frac{\beta}{2m} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_\circ^2 - \gamma^2} \leq \omega_\circ\right) \quad . \tag{30}$$

Si tratta di un oscillatore con periodo di oscillazione $T = \frac{2\pi}{\omega}$ maggiore del periodo naturale di oscillazione $T_\circ = \frac{2\pi}{\omega_{cric}}$ che si aveva in assenza di smorzamento e la cui ampiezza di oscillazione decresce esponenzialmente nel tempo riducendosi di un fattore $1/e$ del suo valore dopo ogni $1/\gamma$ secondi. Si dice che $1/\gamma$ è la costante di tempo del decadimento esponenziale dell'ampiezza di oscillazione. Più piccolo è il valore di $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, cioè più piccolo è il coefficiente di attrito (per un dato oscillatore di massa $m$) più grande è la costante di tempo di decadimento delle sue oscillazioni, cioè più lentamente si smorzano le sue oscillazioni. Inoltre, più piccolo è $\gamma$, più la frequenza di oscillazione sarà vicina a (appena più piccola di) quella naturale $\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dell'oscillatore dato con massa $m$ e costante elastica $k$, più il periodo di oscillazione sarà vicino a (appena più grande di) quello naturale in assenza di attrito.

Il segno $\pm\omega t$ dentro il coseno significa che l'angolo $\omega t$ per $t > 0$ è positivo in un caso (percorso in senso antiorario) e negativo nell'altro (percorso in senso orario). Nel caso particolare in cui $\Delta = 0$ le due soluzioni coincidono, perché per la funzione coseno vale $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$, ma in generale per un angolo di fase non nullo le due soluzioni sono distinte.

Questo oscillatore, con equazione del moto (20) e con $\gamma < \omega_\circ$ è detto *sottosmorzato*.

- Caso $\gamma > \omega_\circ$, cioè discriminante positivo. In questo caso le soluzioni sono entrambe reali ed entrambe negative:

$$\sigma_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_\circ^2} < 0 \quad \text{e} \quad |\gamma_+| > |\gamma_-|. \tag{31}$$

La soluzione generale sarà quindi reale e data da una combinazione lineare di due esponenziali decrescenti:

$$x = Ae^{-\gamma_- t} + Be^{-\gamma_+ t} \tag{32}$$

Se i coefficienti $A$ e $B$ non sono entrambi positivi può accadere che l'ampiezza del moto cresca fino ad un massimo, ma in ogni caso all'aumentare del tempo tende esponenzialmente a zero. Questo caso è detto "oscillatore sovrasmorzato".

- Il caso $\gamma = \omega_\circ$ è quello $\gamma = \omega_\circ$ per cui il discriminante è nullo e l'equazione algebrica (24) ha una sola soluzione reale e negativa:

$$\sigma = -\gamma \tag{33}$$

che significa una soluzione dell'equazione del moto con esponenziale negativo. Questo è il caso particolare dello smorzamento critico ed è simile a quello dell'oscillatore sovrasmorzato.

# 3 Oscillatore armonico in una dimensione forzato e senza dissipazione

L'equazione del moto di un oscillatore armonico unidimensionale forzato e senza dissipazione è:

$$m\ddot{x} = -kx + F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_\circ^2 = \frac{F(t)}{m} \tag{34}$$

dove per il termine forzante consideriamo una forza variable con frequenza angolare generica $\omega$:

$$F(t) = F_\circ \cos(\omega t + \Delta) \quad . \tag{35}$$

Qualunque forza variable nel tempo si può esprimere come una serie di Fourier fatta di tanti termini a diverse frequenze; quindi analizzante la (35) è necessario per capire il caso generale.

Passiamo alla variabile complessa $z = x + iy$ e riscriviamo l'equazione del moto come:

$$\ddot{z} + \omega_\circ^2 z = \frac{\mathcal{F}}{m} \tag{36}$$

con

$$\mathcal{F} = F_\circ e^{i\Delta} e^{i\omega t} = F_\circ e^{i(\omega t + \Delta)}, \quad F_\circ \in \mathbb{R} \;\; \Delta \in \mathbb{R} \quad . \tag{37}$$

Cerchiamo una soluzione complessa del tipo:

$$z = ae^{i\delta} e^{i\omega t} = e^{i(\omega t + \delta)} \quad a \in \mathbb{R} \;\; \delta \in \mathbb{R} \tag{38}$$

Imponendo che essa soddisfi l'equazione del moto (36) otteniamo:

$$(-a\omega^2 e^{i\delta} + a\omega_\circ^2 e^{i\delta}) e^{i\omega t} = \frac{F_\circ}{m} e^{i\Delta} e^{i\omega t} \tag{39}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $e^{-i\omega t}$, e tenendo conto che $e^{i\omega t} e^{-i\omega t} = e^0 = 1$, eliminiamo la dipendenza dal tempo ottenendo

$$ae^{i\delta} = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2} e^{i\Delta} \quad . \tag{40}$$

Poiché i coefficienti che moltiplicano i due numeri complessi $e^{i\delta}$ ed $e^{i\Delta}$ in questa equazione sono reali, se ne deduce che deve essere: $\delta = \Delta$ se il coefficiente moltiplicativo è reale e positivo; $\delta = \Delta + \pi$ se il coefficiente moltiplicativo è negativo (perché $-1 = e^{i\pi}$). Quindi, se la forzante ha una frequenza minore della frequenza naturale dell'oscillatore, questo oscillerà in fase con la forzante; se invece la frequenza forzante è maggiore della frequenza naturale dell'oscillatore esso oscillerà in opposizione di fase rispetto alla forzante (cioè sfasato di $\pi$ rispetto ad essa. La soluzione cercata infatti è:

$$z = ae^{i\delta} e^{i\omega t} = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2} e^{i(\omega t + \Delta)} \tag{41}$$

la cui parte reale è:

$$x(t) = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \Delta) \quad \text{se} \quad \omega < \omega_\circ \tag{42}$$

e

$$x(t) = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \Delta + \pi) \quad \text{se} \quad \omega > \omega_\circ \quad . \tag{43}$$

Come si vede, se la frequenza forzante è uguale alla frequenza naturale dell'oscillatore ($\omega = \omega_\circ$) l'ampiezza dell'oscillazione va all'infinito. Questo non succede i presenza di dissipazione, inevitabile (anche se piccola) in ogni oscillatore.

# 4 Oscillatore armonico in una dimensione forzato e smorzato

L'equazione del moto di un oscillatore unidimensionale forzato e smorzato è:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_\circ^2 = \frac{F(t)}{m} \tag{44}$$

con la forza $F(t)$ data dalla (35) come nel caso precedente. Nel piano complesso l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{z} + \lambda\dot{z} + \omega_\circ^2 z = \frac{\mathcal{F}}{m} \tag{45}$$

dove la forzante in forma complessa è data dalla (37), come nel caso precedente, e di nuovo cerchiamo una soluzione del tipo (38). Imponendo che ssa soddisfi l'equazione del moto (45) abbiamo:

$$(-a\omega^2 e^{i\delta} + i\omega a\lambda e^{i\delta} + a\omega_\circ^2 e^{i\delta})e^{i\omega t} = \frac{F_\circ}{m} e^{i\Delta} e^{i\omega t} \tag{46}$$

Dopo aver eliminato il tempo otteniamo l'equazione:

$$-a\omega^2 e^{i\delta} + i\omega a\lambda e^{i\delta} + a\omega_\circ^2 e^{i\delta} = \frac{F_\circ}{m} e^{i\Delta} \tag{47}$$

e quindi:

$$ae^{i\delta} = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2 + i\omega\lambda} e^{i\Delta} \tag{48}$$

e infine:

$$z(t) = ae^{i\delta}e^{i\omega t} = \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2 + i\omega\lambda} e^{i\Delta} e^{i\omega t} \quad . \tag{49}$$

Poiché questa volar il coefficiente moltiplicativo è complesso e non reale, scriviamo questa equazione nella forma:

$$z(t) = Re^{i\Delta}e^{i\omega t} \qquad \text{dove} \qquad R \equiv \varrho e^{i\vartheta} \equiv \frac{F_\circ/m}{\omega_\circ^2 - \omega^2 + i\omega\lambda} \quad . \tag{50}$$

Adesso usiamo il numero complesso:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho e^{i\vartheta}} = \frac{1}{\varrho} e^{-i\vartheta} = \frac{\omega_\circ^2 - \omega^2 + i\omega\lambda}{F_\circ/m} \tag{51}$$

per il quale sappiamo che il modulo quadro deve essere:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}{F_\circ^2/m^2} \tag{52}$$

e l'angolo con l'asse reale $x$ è dato dall'equazione:

$$\tan(-\vartheta) = -\tan\vartheta = \frac{\omega\lambda}{\omega_\circ^2 - \omega^2} \tag{53}$$

Riscriviamo quindi la soluzione complessa come:

$$z(t) = \varrho e^{i(\omega t + \Delta + \vartheta)} \tag{54}$$

dove tutto è ora noto e la cui parte reale è la soluzione dell'equazione di partenza. Si tratta di una oscillazione alla frequenza $\omega$ della forzante (mantenuta dalla forzante stessa), di ampiezza:

$$\varrho = \frac{F_\circ/m}{\sqrt{(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}} \tag{55}$$

che come si vede dipende dal termine di dissipazione $\lambda = \beta/m$. Più grande è il valore di *lambda* (quindi la dissipazione) più piccola è l'ampiezza dell'oscillazione che raggiunge il massimo valore per $\omega = \omega_\circ$ (alla risonanza). Se $\lambda = 0$ torniamo al caso ideale dell'oscillatore forzato senza dissipazione, nel qual caso l'ampiezza di oscillazione alla risonanza va all'infinito.

Sappiamo che l'energia è proporzionale all'ampiezza di oscillazione al quadrato:

$$E \propto \varrho^2 = \frac{F_\circ^2/m^2}{(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2} \tag{56}$$

e siamo interessati al suo andamento in funzione della frequenza forzante $\omega$, quindi alla funzione:

$$\varrho^2(\omega) = \frac{F_\circ^2/m^2}{(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2} \tag{57}$$

che per $\omega = 0$ vale $\varrho^2(0) = F_\circ^2/(m^2\omega_\circ^4)$, per $\omega \to \infty$ tende a zero e ha un massimo alla risonanza dove vale: $\varrho^2(\omega_\circ) = F_\circ^2/(m^2\omega_\circ^2\lambda^2)$; come si vede, più grande è il valore di $\lambda$, più l'altezza del picco di ampiezza alla risonanza si riduce, e viceversa.

Nei casi di piccola dissipazione il picco alla risonanza è stretto e alto, quindi tutta l'energia è concentrata per valori della frequenza forzante vicini alla risonanza. Riscriviamo la (57) per piccoli valori di $\lambda$ e $\omega \simeq \omega_\circ$:

$$\varrho^2(\omega) \simeq \frac{F_\circ^2/m^2}{4\omega_\circ^2[(\omega_\circ - \omega)^2 + \lambda^2/4]} \tag{58}$$

da cui si vede che la larghezza del picco alla risonanza (calcolata a metà della sua altezza) è $\Delta\omega = \lambda$.

L'efficienza di un oscillatore si può misurare dal rapporto tra quanta energia è immagazzinata in ogni ciclo di oscillazione e quanta energia viene dissipata nello stesso ciclo. Questo rapporto, che è tanto più grande quanto più piccola è la dissipazione, definisce il fattore di qualità $Q$ dell'oscillatore (che è un numero senza dimensioni fisiche). Precisamente:

$$Q = 2\pi \frac{\textit{energia immagazzinata in un ciclo di oscillazione}}{\textit{energia dissipata per ciclo di oscillazione}} \tag{59}$$

Allora, per un periodo naturale $P_\circ$ possiamo scrivere:

$$\frac{(\Delta E)_{P_\circ}}{E} = \frac{2\pi}{Q} \tag{60}$$

e per una frazione di tempo $\Delta t$ possiamo scrivere

$$\frac{(\Delta E)_{\Delta t}}{E} = \frac{2\pi}{Q}\frac{\Delta t}{P_\circ} \tag{61}$$

e infine per un tempo infinitesimo $dt$ scriviamo:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\pi}{Q}\frac{dt}{P_\circ} = -\frac{\omega_\circ}{Q}dt \tag{62}$$

dove abbiamo inserito il segno meno perché in ogni ciclo $dE$ è l'energia che viene *persa.* Questa equazione, che riscriviamo come:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_\circ}{Q} E \tag{63}$$

ci dice come decresce l'energia a partire dal valore iniziale $E_\circ$ e precisamente:

$$E(t) = E_\circ e^{-\omega_\circ t/Q} \tag{64}$$

che scriviamo anche come:

$$E(t) = E_\circ e^{-\lambda t} \tag{65}$$

con:

$$\lambda = \frac{\omega_\circ}{Q} \tag{66}$$

che è corretta dimensionalmente e mostra come $Q$ e $\lambda$ siano l'uno l'inverso dell'altro e collegati l'uno all'altro tramite la frequenza naturale (dato che $Q$ è un numero mentre $\lambda$ è l'inverso di un tempo).

Se l'energia, che è proporzionale all'ampiezza di oscillazione al quadrato, varia nel tempo secondo l'equazione (64) o (65), l'ampiezza di oscillazione seguirà la legge:

$$A(t) = A_\circ e^{-\omega_\circ t/(2Q)} = A_\circ e^{-\gamma t} \qquad \left(\gamma = \frac{\lambda}{2} = \frac{\omega_\circ}{2Q}\right) \tag{67}$$

Misurando l'ampiezza di oscillazione al variare del tempo, e confrontandoli in modo appropriato con la legge (67) si può determinare in modo certo il valore di $\gamma$ (e quindi $\lambda$ e quindi $Q$) dato che la frequenza naturale di oscillazione è una proprietà anch'essa misurabile nel caratterizzare l'oscillatore.