Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Secondo compitino

17 Marzo 2015, Ore 11:30 Aula Magna del Dipartimento

Anna M. Nobili

1 Caratteristiche di base dell'oscillatore armonico

[1] Consideriamo una molla di costante elastica k che si può accorciare e allungare lungo un asse orizzontale che chiamiamo x. Una estremità della molla è fissata all'origine O dell'asse x mentre all'altra è fissata una massa puntiforme m libera di muoversi senza attrito lungo l'asse x. La massa della molla si può considerare trascurabile rispetto ad m. In condizioni di riposo, quando cioè la massa m è ferma e non è presente nessuna forza esterna, la molla ha una lunghezza $x_{\rm o}$ e quindi la massa m si trova nel punto $x = x_{\rm o}$ (prendiamo $x_{\rm o} > 0$). Assumiamo una molla perfetta, tale cioè che il suo riscaldamento per il fatto di allungarsi ed accorciarsi, che avverrebbe a spese dell'energia dell'oscillatore, sia trascurabile.

1. Se la massa m viene spostata in un punto $x \neq x_{\rm o}$ scrivete la formula della forza $F(x)$ che la molla esercita su m in quella nuova posizione e specificatene il verso.

2. Considerate due posizioni della massa m ai due lati opposti della posizione di riposo ed equidistanti da esso. Scrivete la forza $F(x)$ nei due casi e rappresentatela in scala in un disegno.

3. Partendo dalla definizione di energia potenziale data a lezione, calcolate l'energia potenziale $U(x)$ della massa m soggetta alla forza $F(x)$ scritta in risposta alla domanda $n.\,1$. Suggerimento: Ricordate che per il livello di riferimento dell'energia potenziale è conveniente scegliere quello in cui, se la massa m vi si trova con velocità nulla, rimane ferma; che è come dire che nella posizione di riferimento la forza in questione è nulla.

4. Se al generico tempo t la massa m si trova in un punto qualunque x con velocità $\dot{x}$ [per precisione dovremmo scrivere quindi $x(t)$ e $\dot{x}(t)$)] scrivete la formula della sua energia totale $E(x, \dot{x})$ e dite perché in questo caso siete autorizzati a scrivere che questa funzione ha lo stesso valore numerico, che indichiamo con E_1, durante tutto il moto: quindi $E(x, \dot{x}) = E_1$. Dite che segno ha E_1.

5. Sapendo che m passa dal punto $x = x_{\rm o}$ con velocità $v_{\rm o}$, ricavate la distanza massima $(\Delta x)_{max}$ che raggiungerà dal punto $x = x_{\rm o}$. Quale caratteristica fisica dell'oscillatore interviene?

6. Rappresentate in un grafico la funzione $U(x)$ scritta in risposta alla domanda $n.\,3$ specificando il significato della posizione di riposo. Nello stesso piano rappresentate la funzione $E(x) = E_1 > 0$. Essa interseca la funzione $U(x)$ in due punti di coordinate x_A e x_B. Che succede alla massa m quando si trova in uno di questi due punti? Che cosa sapete dire della distanza dei punti x_A e x_B dalla posizione di riposo? Rappresentate infine nel grafico la funzione $E(x) = 0$ e dite che cosa succede in questo caso.

7. Se la molla viene appesa verticalmente (in presenza della accelerazione locale di gravità) si osserva che fissando alla sua estremità libera una massa di 10 grammi si ha un allungamento (verso il basso) dalla posizione di riposo di 1 cm. Calcolate il valore numerico della costante elastica k della molla con le dimensioni fisiche corrette nel sistema SI.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo che decidete di usare deve essere definito.**

2 Soluzione

1. $$F(x) = -k(x - x_o) \qquad (1)$$

   Ricordando che $k > 0$, se $x > x_o$ la forza è negativa, cioè il verso è quello delle x negative, quindi verso x_o; se $x < x_o$ la forza è positiva, cioè il verso è quello delle x positive quindi verso x_o. In ogni caso, la forza è diretta verso la posizione di riposo x_o e per questo si dice “di richiamo”.

2. A due lati esattamente opposti rispetto ad x_o il modulo dello spostamento dalla posizione di riposo è lo stesso e quindi anche il modulo della forza. Il segno dello spostamento è opposto nei due casi e così il segno della forza, come mostrato in Fig. 1.

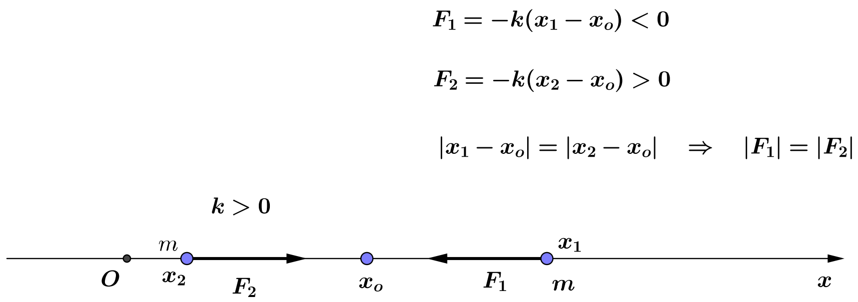

Figura 1: Ai due lati opposti x_1, x_2 rispetto alla sua posizione di riposo x_o la molla richiama con una forza della stessa intensità perché è proporzionale all’entità dello spostamento rispetto alla posizione di riposo, e quindi è la stessa se lo spostamento è lo stesso. Il segno della forze nei due casi è opposto, sempre diretto verso la posizione di riposo (Forza di richiamo)

3. La forza elastica della molla è conservativa e quindi possiamo definire la sua energia energia potenziale in un qualunque punto x rispetto ad un punto di riferimento x_{rif}:

   $$U(x) - U(x_{rif}) = -\mathcal{L}_{x_{rif}\rightarrow x} \qquad (2)$$

   Scegliamo $x_{rif} = x_o$ perché nella posizione di riposo la forza esercitata dalla molla è nulla, quindi:

   $$U(x) = -\mathcal{L}_{x_o\rightarrow x} = k\int_{x_o}^{x}(x' - x_o)dx' = k\int_{0}^{(x-x_o)}(x - x_o)d(x - x_{o)} = \frac{1}{2}k(x - x_o)^2 \qquad (3)$$

   In ogni punto l’energia potenziale risulta proporzionale allo spostamento al quadrato dalla posizione di riposo, ed è positiva in quanto per spostare la massa dalla posizione di riposo è stato necessario fornire lavoro dall’esterno; una volta portata nella nuova posizione la massa possiede “in potenza” una energia pari al lavoro fornito fatto dall’esterno, e quindi ha una energia potenziale positiva.

4. $$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_o)^2 = E_1 > 0 \qquad (4)$$

   L’energia totale è positiva e costante in quanto si è assunto che non ci siano forme di dissipazione.

5. Quando la massa m si trova nella posizione di riposo con velocità v_o ha solo energia cinetica perché l'energia potenziale dipende dalla distanza dalla posizione di riposo, che è nulla; quando si trova alla massima distanza dalla posizione di riposo ha solo energia potenziale ed energia cinetica nulla perché per definizione ha velocità nulla (altrimenti si allontanerebbe ulteriormente). Poiché l'energia totale si conserva, questi due valori devono essere uguali. Quindi:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2_{max} \quad \Rightarrow \quad (\Delta x)_{max} = \frac{v_o}{\sqrt{k/m}} = \frac{v_o}{\omega_o} \quad , \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Vediamo che lo spostamento massimo dalla posizione di riposo dipende da una caratteristica fondamentale dell'oscillatore armonico di costante elastica k e massa m che è la sua frequenza di oscillazione naturale $\omega_o = \sqrt{k/m}$ (che nel sistema SI si misura in rad/s).

6. L'energia potenziale (3) è una parabola con il vertice nel punto $(x_o, 0)$ coem mostrato in Fig. 2. Quando l'energia totale è $E_1 > 0$ la massa m oscilla tra i due punti x_A ed x_B che dipendono da E_1 secondo l'equazione:

$$E_1 = \frac{1}{2}k(x_B - x_o)^2 = \frac{1}{2}k(x_A - x_o)^2 \tag{6}$$

Quando la massa arriva in x_A oppure in x_B si ferma e inverte direzione di moto perché ha raggiunto la massima ampiezza di oscillazione (massima distanza dal punto di riposo) compatibile con la sua energia totale E_1; per andare oltre dovrebbe avere una energia cinetica negativa, che non è possibile. Quando l'energia totale è nulla l'ampiezza di oscillazione è nulla, cioè la massa m resta ferma nella sua posizione di riposo.

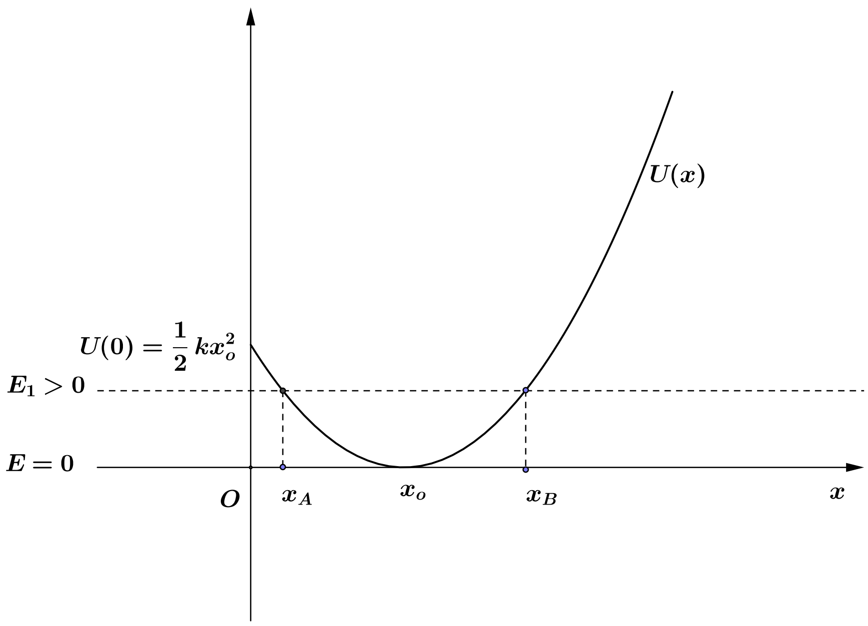

Figura 2: L'energia potenziale (3) è una parabola. Il valore dell'energia totale determina l'ampiezza di oscillazione (per una data costante elastica k). Quando l'energia totale è nulla l'ampiezza di oscilalzione è nulla.

7. Sotto l'azione della forza gravitazionale agente sulla massa m la molla si allunga fino alla posizione di equilibrio x_{eq} (l'asse x è ora l'asse verticale diretto verso il basso). Ciò avviene quando la forza gravitazionale diretta verso il basso (positiva) uguaglia la forza elastica di

richiamo diretta verso l'alto (negativa) come mostrato in Fig. 3:

$$mg = k(x_{eq} - x_o) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{x_{eq} - x_o} \tag{7}$$

Con i dati del testo, usando unità SI, abbiamo $k = \frac{10^{-2} \cdot 9.8}{10^{-2}} = 9.8\,\mathrm{N/m}$

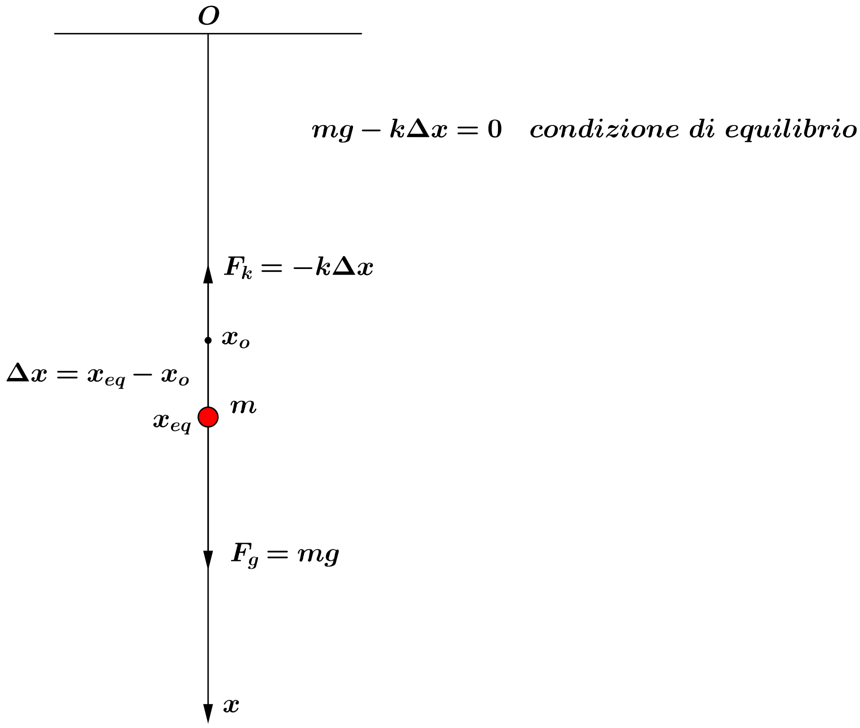

Figura 3: La molla, con la massa m alla sua estremità e lunghezza di riposo x_o, è ora appesa verticalmente e quindi si allunga verso il basso a causa della forza gravitazionale agente su m (abbiamo assunto che la massa della molla sia trascurabile rispetto ad essa). Quando l'allungamento della molla è tale che la forza elastica di richiamo verso la posizione di riposo uguaglia la forza gravitazionale si raggiunge l'equilibrio.