Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Terzo Appello

3 Settembre 2016, Ore 9 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Moti di oscillatori armonici accoppiati

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1] Abbiamo due oscillatori armonici unidimenstionali costituiti ciascuno da una massa puntiforme m e da una molla di costante elastica k la cui lunghezza di riposo assumiamo nulla. Sia X l'asse lungo il quale si svolge il moto. Il primo oscillatore è soggetto ad una forza di richiamo verso le X negative, il secondo verso le X positive. Essi vengono accoppiati l'uno all'altro tramite una terza molla di costante elastica k_3 posta tra l'una e l'altra massa, essendo L la distanza tra i punti di sospensione dei due oscillatori (vedi Fig. 1). Anche in questo caso la lunghezza di riposo della molla si assume nulla. Indichiamo con X_1 e X_2 (essendo $X_2 > X_1$) le posizioni delle due masse ad un generico istante t

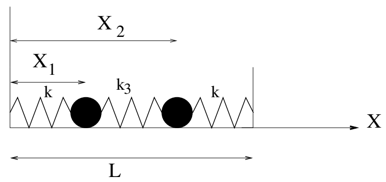

Figura 1

1. Scrivete a parole la definizione della forza elastica, in modo che sia chiaro quale è la grandezza, avente le dimensioni fisiche di una lunghezza (misurata quindi in metri), alla quale essa è proporzionale.

2. Scrivete in termini delle variabili X_1 ed X_2 l'equazione del moto della prima massa tenendo conto che essa è soggetta sia al richiamo della propria molla di costante k che a quello della molla di accoppiamento di costante k_3. Fate lo stesso per la seconda massa.

3. Se indichiamo con X_{eq1} e X_{eq2} i valori delle coordinate di posizione delle due masse quando esse sono all'equilibrio, scrivete le equazioni che queste coordinate devono soddisfare e calcolatene i valori in termini di k, k_3 ed L (utilizzate le equazioni del moto scritte al punto 2 e imponete per ciascuna la condizione di equilibrio).

4. Al generico tempo t le masse si troveranno spostate dalle rispettive posizioni di equilibrio di quantità che indichiamo, rispettivamente, con x_1 e x_2, tali cioè che: $X_1 = X_{eq1} + x_1$ e $X_2 = X_{eq2} + x_2$. Riscrivete le equazioni del moto del punto 2 in termini delle variabili x_1 e x_2. Cosa notate riguardo alle coordinate X_{eq1} e X_{eq2}?

5. Calcolate la coordinata del centro di massa dei due oscillatori X_{CM} (le molle hanno massa trascurabile) e chiamate x_{CM} lo spostamento dalla sua posizione di equilibrio. Usando le equazioni scritte al punto 3 scrivete l'equazione del moto per x_{CM}. Dite con quale frequenza angolare oscilla e confrontatela con quella di ogni singolo oscillatore nel caso non siano accoppiati. Scrivete infine l'equazione del moto per la coordinata relativa $x_{rel} = x_2 - x_1$ e dite con quale frequenza angolare oscilla.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare nelle risposte lo stesso simbolo. Ogni simbolo che decidete di usare deve essere definito.**

2 Soluzione

1. La forza elastica è una forza di richiamo verso un punto. Nel caso di una molla essa richiama verso il suo punto di sospensione. La forza elastica dipende dalle proprietà del materiale di cui è fatta la molla, dalla sua forma e dalle sue dimensioni, che ne determinano la 'costante elastica' cui la forza è proporzionale. La forza di richiamo della molla è proporzionale allo spostamento dalla sua posizione di riposo (trattandosi di una forza di richiamo essa agisce sempre in verso opposto a quello dello spostamento). Tutto questo non vale più se a causa di una forza eccessiva la molla, anche senza rompersi, perde la propria capacità di tornare nella sua posizione di riposo (si parla di perdita di elasticità).

2. L'equazione del moto per la prima massa nella variabile $X_1(t)$ che ne indica la posizione istantanea sull'asse X è:
$$m\ddot{X}_1 = -kX_1 + k_3(X_2 - X_1)$$
essendo $\ddot{X}_1(t)$ l'accelerazione istantanea della prima massa, $-kX_1$ la forza esercitata su di essa dalla propria molla di sospensione che la richiama verso l'origine e $+k_3(X_2 - X_1)$ la forza con cui la molla di accoppiamento la attira verso l'altra massa, da cui la separa la distanza $X_2 - X_1$ (che è tutto l'allungamento, dato che la lunghezza di riposo è nulla per ipotesi). Si vede bene che queste due forze hanno segno opposto.

   Analogamente, l'equazione del moto della seconda massa nella variabile $X_2(t)$ è:
$$m\ddot{X}_2 = k(L - X_2) - k_3(X_2 - X_1)$$

3. Quando la forza totale agente su ciascuna massa è nulla ciascuna di esse ha accelerazione nulla ($\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2 = 0$) e il sistema si dice all'equilibrio. Il testo indica con X_{eq1} e X_{eq2} le coordinate posizione delle due masse quando questo accade. Valgono quindi le equazioni:
$$\begin{aligned} 0 &= -kX_{eq1} + k_3(X_{eq2} - X_{eq1}) \\ 0 &= k(L - X_{eq2}) - k_3(X_{eq2} - X_{eq1}) \end{aligned} \tag{1}$$
e risolvendo questo sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite X_{eq1}, X_{eq2} abbiamo:
$$\frac{X_{eq1}}{X_{eq2}} = \frac{k_3}{k + k_3}$$
e per i loro singoli valori:
$$\begin{aligned} X_{eq1} &= \frac{k_3}{k + 2k_3}L \\ X_{eq2} &= \frac{k + k_3}{k + 2k_3}L \end{aligned}$$
Osserviamo che le singole posizioni di equilibrio dipendono da L (la dimensione lineare di tutto il sistema), ma non il loro rapporto.

4. Usando $X_1 = X_{eq1} + x_1$ e $X_2 = X_{eq2} + x_2$, e ricordando che $\ddot{X}_{eq1} = \ddot{X}_{eq2} = 0$ le equazioni del moto scritte al punto 2 diventano:
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kX_{eq1} + k_3(X_{eq2} - X_{eq1}) - kx_1 + k_3(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= k(L - X_{eq2}) - k_3(X_{eq2} - X_{eq1}) - kx_2 - k_3(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{2}$$
e usando le equazioni all'equilibrio (1) otteniamo le equazioni del moto in termini degli spostamenti delle due masse dalle rispettive posizioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k_3(x_2 - x_1) \\
m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k_3(x_2 - x_1)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Notiamo che le posizioni di equilibrio sono scomparse ed è scomparsa anche la lunghezza L.

5. Dalla definizione di centro di massa abbiamo:

$$X_{CM} = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{X_{eq1} + X_{eq2}}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} = X_{eqCM} + x_{CM}$$

Per lo spostamento del centro di massa dalla posizione di equilibrio x_{CM}, ricordando che $\ddot{X}_{eq1} = \ddot{X}_{eq2} = 0$ (e quindi anche $\ddot{X}_{eqCM} = 0$), e usando usando le Eq. (3) e abbiamo:

$$m\ddot{x}_{CM} = -kx_{CM} \tag{4}$$

quindi il centro di massa oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio con la stessa frequenza angolare di oscillazione che ogni singola massa avrebbe in assenza della molla di accoppiamento, cioè: $\omega_{CM} = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Usando i valori calcolati al punto 3 per le coordinate dei punti di equilibrio delle singole masse notiamo che la posizione di equilibrio del centro di massa risulta essere:

$$X_{eqCM} = \frac{X_{eq1} + X_{eq2}}{2} = \frac{L}{2}$$

come potevamo aspettarci per ragioni di simmetria.

Per la coordinata $x_{rel} = x_2 - x_1$, che rappresenta lo spostamento relativo tra le due masse rispetto alla posizione di equilibrio relativa, sempre usando le Eq. (3) abbiamo:

$$m\ddot{x}_{rel} = -(k + 2k_3)x_{rel} \tag{5}$$

cioè le masse oscillano l'una rispetto all'altra (attorno alla posizione di equilibrio relativa) con frequenza angolare $\omega_{rel} = \sqrt{\frac{k+2k_3}{m}}$.

In conclusione, se due oscillatori vengono accoppiati elasticamente essi oscillano sia insieme (modo comune, rappresentato dal centro di massa) che l'uno rispetto all'altro (modo differenziale). Le rispettive frequenze angolari di oscillazione, dette anche modi normali, dipendono solo dalle masse e dalle costanti elastiche coinvolte. Come si vede dalle equazioni del moto, un sistema di oscillatori accoppiati continua ad essere lineare e ciascuno dei modi normali si riferisce ad un oscillatore armonico indipendente. Questo è vero anche per sistemi di oscillatori molto complessi e spiega l'importanza dello studio dell'oscillatore armonico. I modi normali non dipendono dalle particolari posizioni di equilibrio la cui posizione specifica è irrilevante ai fini del calcolo dei modi normali.