Fisica I, *a.a.* 2015–2016 – Quinto Appello

14 Gennaio 2017, Ore 9:30 Aula PN1 Polo Porta Nuova

Anna M. Nobili

1 Liquidi in un contenitore rotante

(Leggete per prima cosa la nota a piè di pagina)[1] Un contenitore cilindrico C di raggio interno R ed altezza H contenente acqua fino ad un'altezza h si trova in un laboratorio L solidale con la Terra, Per ipotesi la Terra è piatta e non rotante e costituisce in buona approssimazione un sistema di riferimento inerziale. C viene messo in rotazione, tramite un motore, attorno al suo asse di simmetria z a velocità angolare costante $\vec{\omega}$ rispetto ad L (Fig. 1). Si ricorda che la superficie libera di un liquido in un contenitore si dispone in modo che in ogni suo punto il piano tangente sia perpendicolare alla risultante delle forze esterne agenti in quel punto sulla massa di ogni elemento di volume del liquido. Ad esempio, in un contenitore fermo la superficie libera dell'acqua ha la forma di un piano orizzontale, perpendicolare in ogni punto alla accelerazione di gravità $\vec{g}$ diretta lungo la verticale locale.

Nel caso di Fig. 1 si osservano due fenomeni: *a*) all'inizio della rotazione di C la superficie libera dell'acqua resta orizzontale. *b*) A regime, dopo un certo tempo, la superficie libera dell'acqua assume una forma concava simmetrica attorno all'asse z (si abbassa al centro e si alza verso le pareti). (Nota: Il liquido è incomprimibile e c'è attrito tra il liquido e le pareti di C).

1. Spiegate a parole il perché dei fenomeni *a*) e *b*). Nel caso *b*) quale accelerazione interviene oltre a $\vec{g}$, e perché?
2. La superficie libera di forma concava che si forma a regime interseca il piano r, z lungo una curva che chiamiamo γ. Ricopiate la Fig. 1 aggiungendovi la curva γ.
3. γ è una curva nel piano r, z e si può scrivere nella forma $z = z(r)$. Ricavate questa funzione procedendo come segue: *i*) in un punto P di γ con $0 < r < R$ disegnate la risultante delle accelerazioni esterne (forze per unità di massa), la retta tangente alla curva in P e l'angolo ϑ che essa forma con la linea orizzontale; *ii*) calcolate $\tan\vartheta$ in termini delle accelerazioni esterne; *iii*); in P considerate un piccolo spostamento orizzontale Δr, la variazione Δz corrispondente sulla curva γ e scrivete $\tan\vartheta$ in termini di questi due segmenti; *iv*) passate ai rispettivi infinitesimi dz e dr, scrivete $\frac{dz}{dr}$ in termini delle accelerazioni esterne e infine integrate per ottenere la funzione z(r) che rappresenta la curva γ. Che curva è? Che superficie quella di cui γ costituisce l'intersezione con il piano r, z?
4. Indicate nella vostra Fig. 1 le grandezze $z_\circ$ e z_R definite come $z(r = 0)$ e $z(r = R)$ e ricavate il massimo dislivello $d = z_R - z_\circ$ tra il punto di minimo della curva γ e la sua altezza massima (dove interseca le pareti del contenitore C).
5. Sapendo quale forza fornisce al liquido l'energia per sollevarsi del dislivello d contro la forza gravitazionale, usate la conservazione dell'energia per ricavare in modo diverso dal precedente il dislivello d, riottenendo il risultato precedente.
6. Per un contenitore rotante con $R = 20\,\text{cm}$ si osserva che nel punto Q in cui la curva γ interseca la parete del contenitore l'angolo ϑ è di 60°. Dite in che rapporto stanno le due accelerazioni agenti sul liquido nel punto Q e usando l'espressione trovata prima per il dislivello d calcolate il suo valore numerico in questo caso.

[1] **Le risposte ai quesiti devono essere numerate come i quesiti stessi. Le grandezze cui il testo ha assegnato uno specifico simbolo devono conservare lo stesso simbolo. Ogni nuovo simbolo introdotto DEVE essere definito.**

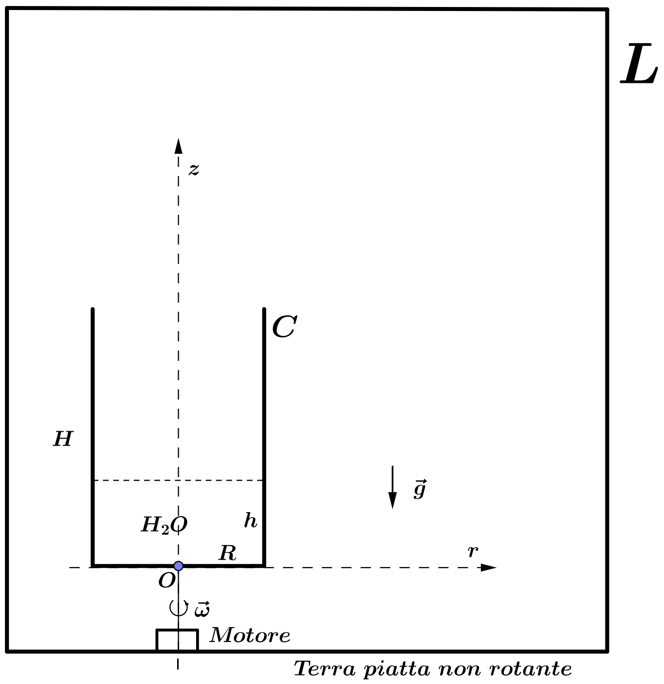

Figura 1: Sezione nel piano r, z del laboratorio L solidale con la Terra e del contenitore cilindrico C di raggio interno R ed altezza H contenente acqua fino all'altezza h. In ogni punto del laboratorio la Terra produce l'accelerazione $\vec{g} = (0, -9.8\,\mathrm{ms}^{-2})$. Un motore può far girare C rispetto ad L mantenendo una velocità angolare costante $\vec{\omega} = (0, \omega)$.

2 Soluzione

1. Il contenitore trasmette la sua rotazione all'acqua grazie all'attrito tra questa e le pareti. Ciò richiede un po' di tempo, quindi all'inizio (caso a)) l'acqua non ruota ancora rispetto ad L e perciò la sua superficie libera mantiene la forma piana orizzontale che aveva in assenza di rotazione (perpendicolare in ogni punto alla accelerazione locale di gravità $\vec{g}$). Una volta che C ha trasmesso all'acqua la velocità angolare $\vec{\omega}$ l'aqua ruota rispetto ad L (riferimento inerziale), quindi costituisce un riferimento non inerziale e vi compare la forza centrifuga che allontana ogni elemento di massa dell'acqua dall'asse di rotazione (tanto più quanto più esso è lontano dall'asse perché la forza centrifuga è lineare con tale distanza) facendola salire ai bordi (dato che il liquido non è comprimibile). Questo spiega il caso b).

2. La curva γ del caso b) è mostrata in Fig. 2.

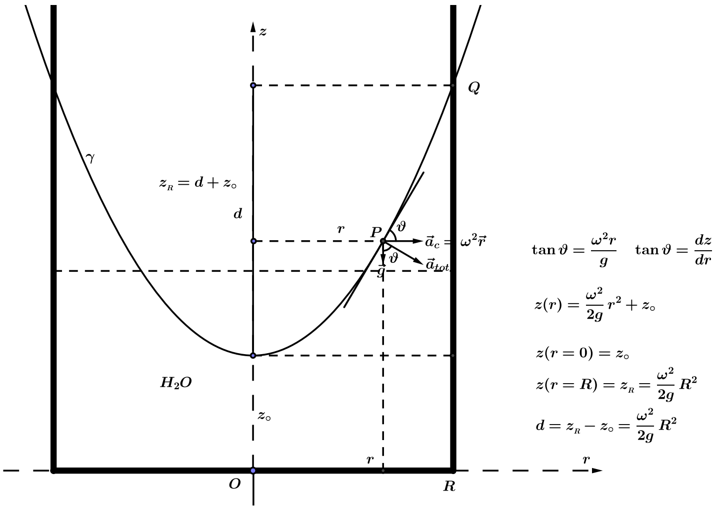

Figura 2: La curva γ è una parabola ed è la sezione nel piano r, z di un paraboloide di rotazione attorno all'asse z. In Figura si riporta anche l'angolo ϑ, l'equazione della parabola e l'espressione del massimo dislivello d raggiunto dall'acqua. essendo il liquido incomprimibile, ed essendo impossibile creare materia dal nulla, si nota che il volume occupato dal liquido sollevato sopra il livello $z = h$ deve essere pari a quello lasciato libero dal liquido che si è abbassato sotto lo stesso livello. Se ne deduce che per forza sarà $z_\circ < h$. In effetti, calcolando i due volumi descritti e imponendo al loro uguaglianza si può calcolare il valore di $z_\circ$. Per semplicità nel problema ci occupiamo soltanto del dislivello $d = z_R - z_\circ$

3. Vedi Fig. 2 e relative formule.

4. Vedi Fig. 2 e relative formule.

5. Per essere innalzata di un dislivello d contro l'azione della gravità locale una massa unitaria di liquido deve ricevere l'energia gd. L'unica forza presente è quella centrifuga, che a distanza R dall'asse di rotazione, cioè alla distanza delle pareti del contenitore, vale (per unità di massa) $\omega^2 R$ e può quindi fornire, a quella distanza, l'energia $\frac{1}{2}\omega^2 R^2$. Uguagliando le due si ottiene il massimo dislivello d:
   $d = \frac{\omega^2}{2g} R^2$
   E' chiaro che scrivendo la stessa uguaglianza ad una distanza generica $0 < r < R$ si ha $g(z(r) - z_\circ) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, e quindi:
   $z(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + z_\circ$
   che è l'equazione della parabola come ottenuta prima usando l'angolo ϑ e al sua tangente.

6. Se $\vartheta = 60° = \frac{\pi}{3}$, allora $\frac{\omega^2 R}{g} = \tan(\pi/3) = 1.73$ e il dislivello d vale (essendo $R = 0.2\,\text{m}$):

   $d = 1.73 \cdot \frac{0.2}{2}\,\text{m} = 17.3\,\text{cm}$