Fisica I: Lezione del 29 Novembre 2015

Anna M. Nobili

1 Moto del proiettile: equazioni del moto, legge oraria e traiettoria

In un laboratorio sulla superficie della terra al tempo $t = 0$ un proiettile puntiforme di massa m viene sparato da un punto che prendiamo come origine O di un sistema di assi cartesiani ortogonali con velocità $\dot{\vec{r}}_\circ$ giacente nel piano y, z, essendo z l'asse verticale. L'unica forza presente è la forza gravitazionale locale, che assumiamo essere costante nel tempo e uniforme nello spazio. Inoltre assumiamo di poter considerare il laboratorio come un sistema di riferimento inerziale, il che equivale a trascurare eventuali effetti dovuti sia alla rotazione della Terra attorno al proprio asse che al suo moto di rivoluzione attorno al Sole.

Poiché l'unica forza in gioco è diretta lungo z e la velocità iniziale giace nel piano y, z si deduce che il moto si deve svolgere nel piano y, z e quindi ci riferiamo soltanto a questo piano, tralasciando del tutto la direzione x (l'altro asse della terna che giace nel piano orizzontale).

Indichiamo con $\vec{g} = (0, -g)$ ($g \simeq 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$) il vettore della accelerazione locale di gravità e con $\vec{r}(t)$ il vettore posizione istantaneo del proiettile ad ogni tempo $0 \leqslant t \leqslant t_f$ essendo t_f il tempo in cui tocca terra alla fine del suo volo.

Nota: Il vettore della accelerazione locale di gravità $\vec{g}$ sulla superficie della è diretto lungo la verticale verso la superficie stessa (in effetti esso definisce la verticale locale). Nel riferimento di Figura 1 da noi usato $\vec{g}$ è diretto lungo la direzione negativa dell'asse z, quindi la componente z del vettore $\vec{g}$ (che peraltro è la sola non nulla) è negativa, come abbiamo scritto sopra. Tuttavia, il vettore in quanto tale si indica con $\vec{g}$; soltanto quando scriveremo le equazioni del moto per componenti nel riferimento dato (vedi Eq. (4) ed Eq. (6)) dovremo riportare il segno meno. Questo perché $\vec{g}$ in quanto vettore è indipendente dal sistema di riferimento usato. Ad esempio, se scegliessimo un riferimento y, z' con l'asse z' rivolto verso la superficie della Terra ciò non avrebbe nessun effetto sul vettore della accelerazione locale di gravità, ma la sua componente z' in questo caso sarebbe positiva, mentre nel caso precedente la componente z era negativa. Come abbiamo detto a lezione, è proprio per questa proprietà di invarianza che si usano i vettori.

Le condizioni iniziali (posizione e velocità del proiettile al tempo $t = 0$) sono (Figura 1):

$$\vec{r}_\circ = (0, 0) \qquad \dot{\vec{r}}_\circ = (v_{ox}, v_{oy}) \;\; \text{con} \;\; v_{oy} > 0, v_{oz} > 0 \tag{1}$$

Il proiettile si muove nel piano y, z, quindi ha 2 gradi di libertà (per individuare la sua posizione nel piano ad ogni istante occorre conoscere due coordinate), quindi ci sono 2 equazioni del moto. Usando la legge fondamentale della dinamica di Newton, valida in un riferimento inerziale, scriviamo le equazioni del moto (in forma vettoriale):

$$m_i \ddot{\vec{r}}(t) = m_g \vec{g} \;\;,\;\; m_i = m_g \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{g} \tag{2}$$

dove m_i è la massa inerziale del proiettile e m_g la sua massa gravitazionale (o "carica" gravitazionale, con la quale il proiettile interagisce gravitazionalmente con la Terra), che sappiamo, da esperimenti molto precisi, essere uguali tra loro. Ne risulta che il moto del proiettile, in quanto moto puramente gravitazionale, non dipende dalla sua massa. Avremmo potuto non menzionarla affatto nella enunciazione del problema; sarà chiaro alla fine perché l'abbiamo introdotta.

Per conoscere il moto del proiettile (cioè la sua posizione ad ogni $0 \leqslant t \leqslant t_f$ dobbiamo integrare le equazioni del moto (2) imponendo le condizioni iniziali (1). Usiamo il plurale perché sono 2, per

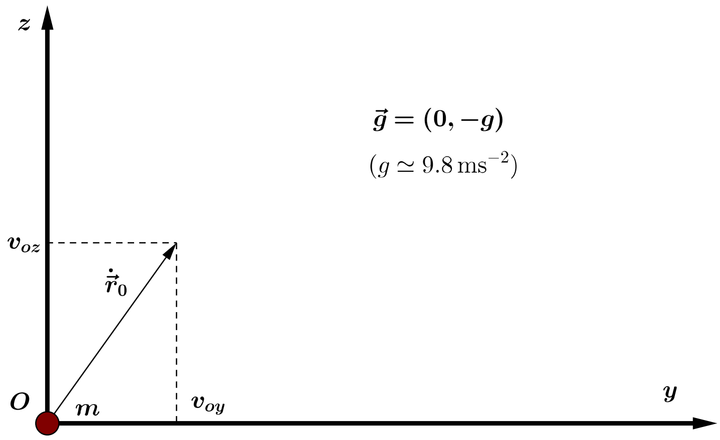

Figura 1: Posizione e velocità del proiettile al tempo iniziale $t = 0$.

le due coordinate y, z. Eseguiamo una prima integrazione per ottenere la velocità $\dot{\vec{r}}(t)$:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \int \vec{g}dt + \dot{\vec{r}}_\circ = \vec{g}\int dt + \dot{\vec{r}}_\circ = \vec{g}t + \dot{\vec{r}}_\circ \quad . \tag{3}$$

(l'accelerazione locale di gravità non varia nel tempo e quindi si puà portare fuori dal segno di integrale). Per verificare che abbiamo ottenuto il risultato corretto basta derivare rispetto al tempo le (3) e vedere che si riottengono le (2) (la velocità iniziale è un valore dato e quindi la sua derivata rispetto al tempo è nulla). Se scriviamo le (3) per le singole componenti otteniamo (usando le condizioni iniziali per la velocità):

$$\dot{y}(t) = v_{oy} \qquad\qquad \dot{z}(t) = -gt + v_{oz} \tag{4}$$

da cui si vede che lungo la coordinata y (nel piano orizzontale) si ha un modo a velocità costante (non essendoci alcuna forza la velocità iniziale v_{oy} resta costante) mentre lungo la coordinata z la velocità iniziale (diretta verso l'alto) diminuisce a causa della accelerazione di gravità (diretta verso il basso), si azzera al tempo $\bar{t} = v_{oz}/g$, quindi diventa negativa (diretta verso il basso) e aumenta (in modulo) linearmente (di 9.8 metri per ogni secondo) fino al tempo finale t_f in cui il proiettile tocca terra.

Per ottenere la posizione del proiettile ad ogni $0 \leqslant t \leqslant t_f$ integriamo rispetto al tempo la sua velocità (3):

$$\vec{r}(t) = \int \vec{g}\,tdt + \int \dot{\vec{r}}_\circ dt + \vec{r}_\circ = \vec{g}\int tdt + \dot{\vec{r}}_\circ \int dt = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \dot{\vec{r}}_\circ t \tag{5}$$

che nelle singole componenti vale:

$$y(t) = v_{oy}t \qquad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{oz}t \quad . \tag{6}$$

Anche in questo caso, per verificare che abbiamo eseguito correttamente l'integrazione, possiamo derivare (rispetto al tempo) la funzione $\vec{r}(t)$ ottenuta e verificare che riotteniamo la velocità $\dot{\vec{r}}(t)$.

Nella direzione y, in assenza di forza, la distanza dalla posizione iniziale (l'origine) cresce linearmente con la velocità costante iniziale v_{oy}. Invece lungo z, in presenza di una accelerazione costante, il moto è uniformemente accelerato (in effetti decelerato, perché l'accelerazione è negativa).

Queste equazioni forniscono la legge oraria del moto del proiettile.

Per ottenere la traiettoria dobbiamo eliminare il tempo e scrivere una relazione tra le coordinate y e z. Dalla prima delle (6) otteniamo $t = y/v_{oy}$, e sostituendolo nella seconda otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$z = -\frac{g}{2v_{oy}^2}y^2 + \frac{v_{oz}}{v_{oy}}y \quad . \tag{7}$$

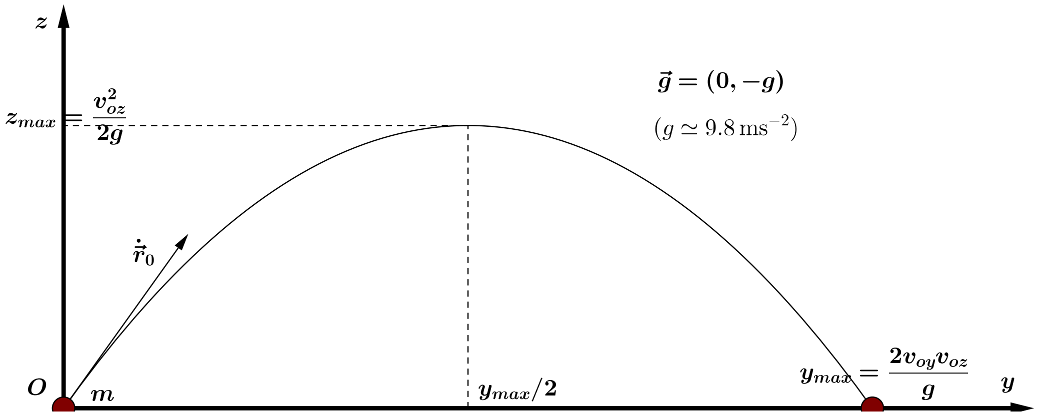

Figura 2: Traiettoria parabolica percorsa dal proiettile.

Si tratta evidentemente dell'equazione di una parabola (Figura 2). L'asse di simmetria della parabola è parallelo all'asse y (non è l'asse y stesso a causa della presenza del termine che contiene la coordinata y alla potenza 1) e la parabola è rovesciata (perché il coefficiente di y^2 è negativo). Quando $z = 0$ (il proiettile arriva a terra) il valore di y è massimo. Dalla (7):

$$y_{max} = \frac{2v_{oy}v_{oz}}{g} \quad . \tag{8}$$

Per ragioni di simmetria, a metà di questo tempo il proiettile ha raggiunto la sua massima altezza z_{max} che vale, usando la (7) per $y = y_{max}/2$:

$$z_{max} = z(y_{max}/2) = -\frac{g}{2v_{oy}^2}\left(\frac{v_{oy}v_{oz}}{g}\right)^2 + \frac{v_{oz}}{v_{oy}}\frac{v_{oy}v_{oz}}{g} = \frac{v_{oz}^2}{2g} \tag{9}$$

Per avere il tempo finale t_f al quale il proiettile tocca terra basta usare la prima delle (6) sapendo che al tempo finale il valore di y è massimo (y_{max} si chiama anche gittata):

$$y(t_f) = v_{oy}t_f = \frac{2v_{oy}v_{oz}}{g} \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \frac{2v_{oz}}{g} \quad . \tag{10}$$

E il tempo necessario al proiettile per raggiungere la massima altezza è $\frac{t_f}{2} = \frac{v_{oz}}{g}$.

La considerazione da fare sulla massa è la seguente. È corretto che i risultati fin qui ottenuti non dipendano dalla massa del proiettile. Questo è vero perché la sola forza in gioco è quella gravitazionale, per la quale, nella equazione della dinamica di Newton, la massa si può semplificare. Questo non succede in presenza di forze non gravitazionali. Ad esempio, è evidente che se volessimo conoscere l'effetto di un proiettile lanciato ad una certa velocità contro un bersaglio (esplosivi a parte), questo dipenderà certamente dalla massa del proiettile. In generale, è esperienza comune che lanciare un corpo ad una data velocità dipende dalla sua massa.