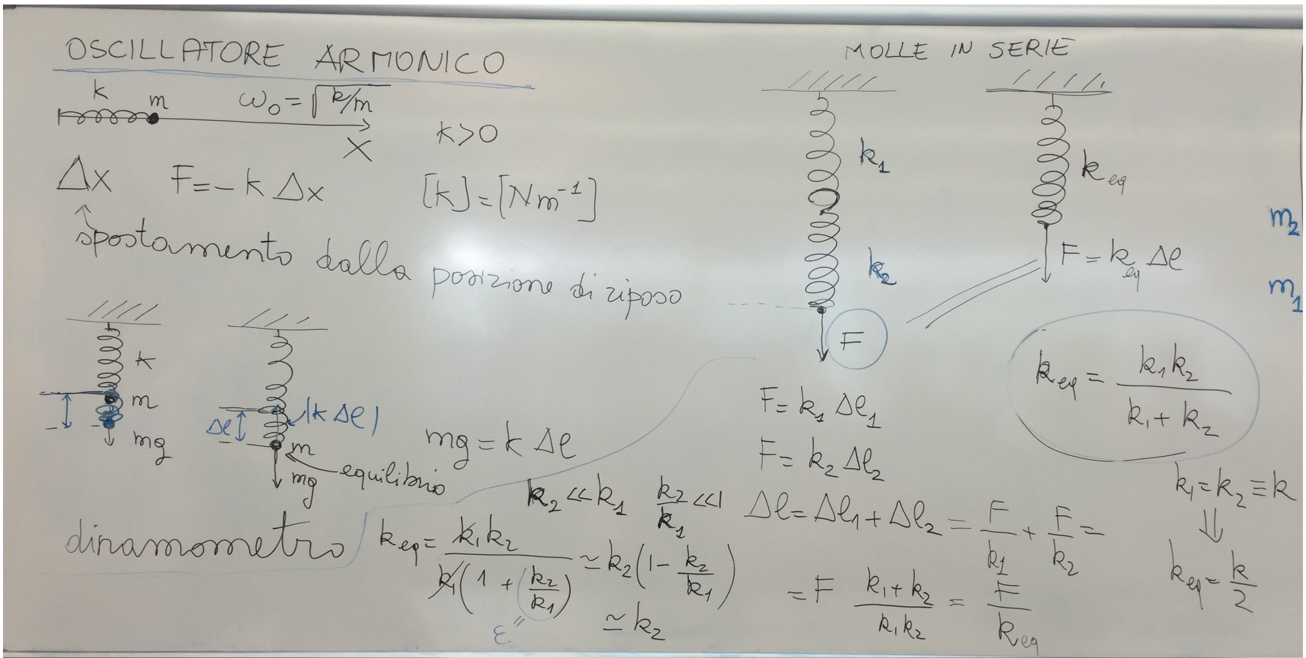
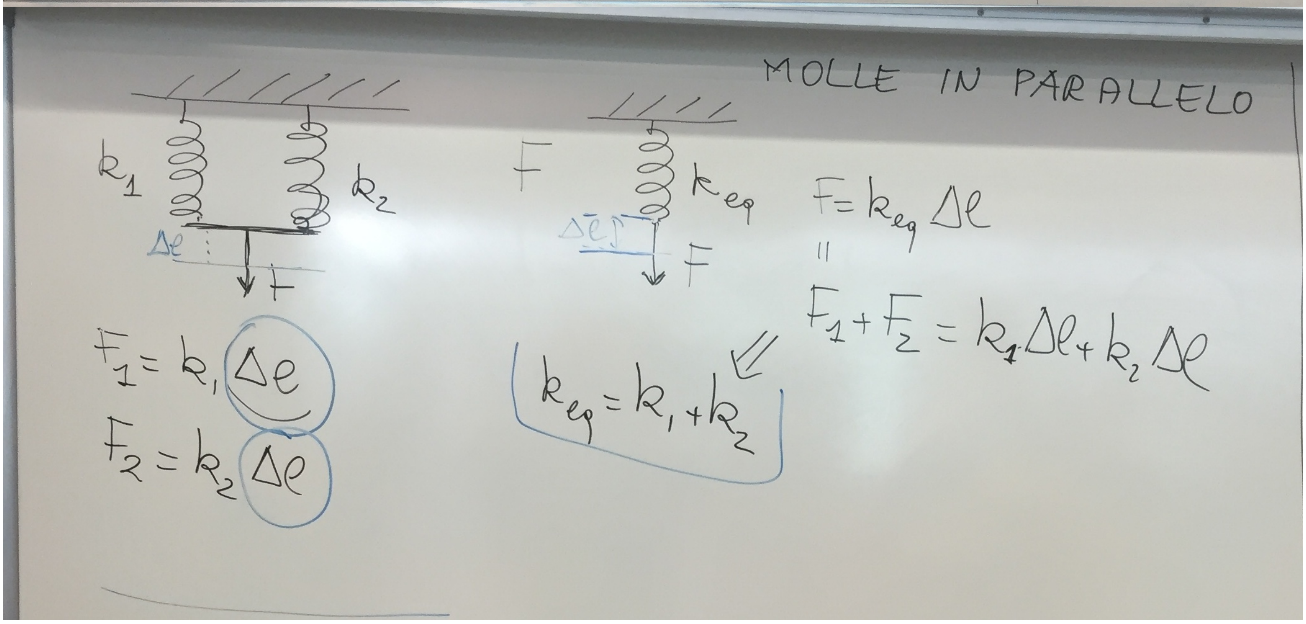
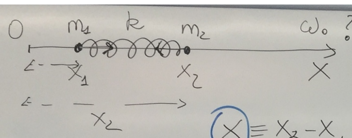
S5 - Lezione 15 Marzo 2016; 17 Marzo compitino

- Oscillatore armonico. Posizione di equilibrio (caso in presenza della gravità locale)
- Costante elastica equivalente di molle in seri e in parallelo
- Oscillatore armonico con due masse. Concetto di massa ridotta. Forza centrale e moto piano.
- Equazioni del moto, condizioni iniziali e soluzione generale







ω_0 ?

$$\ddot{X} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

$$X \equiv x_2 - x_1$$

$$\dot{X} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

$$m_2 \times \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k\,(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k\,(x_2 - x_1) \end{cases} \quad \times\, m_1$$

$$\begin{cases} m_2 m_1 \ddot{x}_1 = m_2\, k\,(x_2 - x_1) \\ m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -m_1\, k\,(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$m_1 m_2 \ddot{x}_2 - m_1 m_2 \ddot{x}_1 = -k(x_2 - x_1)(m_1 + m_2)$$

$$m_1 m_2 \underbrace{(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)}_{"\ddot{X}} = -(m_1 + m_2)\, k \underbrace{(x_2 - x_1)}_{X}$$

$$m_1 m_2 \ddot{X} = -(m_1 + m_2)\, k X$$

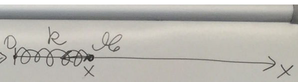
$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{X} = -kX$$

$$\mathcal{M} \ddot{X} = -kX$$

Es: $m_1 = m_2 \equiv m$

$$\mathcal{M} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{(m/2)}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$



$$\mathcal{M} \ddot{X} = -kX \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mathcal{M}}}$$

sistema ridotto ad 1 solo corpo

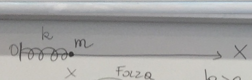
$$\mathcal{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{massa ridotta}$$

Es: $m_2 << m_1$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = m_2$$

IN GENERALE:

MOTO PIANO (Forza centrale)



Forza

$$m\ddot{x} = -kx \qquad k > 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{rad s}^{-2}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$P_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \ \text{s}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{P_0} \ \text{Hz}$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0$$

$$x(t) = \overset{?}{A} \cos(\omega_0 t) + \overset{?}{B} \sin(\omega_0 t)$$

Soluzione generale

$$x(t{=}0) = x_0 \qquad \dot{x}(t{=}0) = v_{x0}$$

CONDIZIONI INIZIALI

La soluzione generale deve rispettare le condizioni iniziali date

$$x(t{=}0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{x}(t{=}0) = \omega_0 B = v_{x0} \longrightarrow B = \frac{v_{x0}}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_{x0}}{\omega_0} \sin\omega_0 t$$

$$x(t) = \overset{?}{a} \cos(\omega_0 t + \overset{?}{\Delta})$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta)$$

$$x(0) = a\cos\Delta \equiv x_0$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 a \sin\Delta = v_{x0}$$

$$\cos\Delta = \frac{x_0}{a} \qquad \sin\Delta = -\frac{v_{x0}}{a\omega_0} \qquad \Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_0^2}}$$

$$\cos^2\Delta + \sin^2\Delta = 1 \qquad a > 0$$

$$\tan\Delta = -\frac{v_{x0}}{\omega_0 x_0}$$