

S8 - Lezioni 19 e 21 Aprile 2016:

- Corpo rigido. Definizione, gradi di libertà e angoli di Eulero
- Riferimento inerziale e riferimento fisso con il corpo rigido (non inerziale in caso di rotazione)
- Trasformazioni di coordinate da riferimento inerziale a non inerziale, una matrice di rotazione per ogni angolo di Eulero. Matrice di rotazione complessiva
- Energia cinetica del corpo rigido. Momento angolare, momento di inerzia e tensore di inerzia

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

$M = \sum_{i=1}^N m_i$
 $dm = \rho dV$
 $[\rho] = \text{kg m}^{-3}$
 $M = \int \rho dV$
 in generale non uniforme
 (ma costante nel tempo)

$3 + 2 + 1 = 6$ 3 moto rotatorio
 gradi di libertà

$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow M \ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{0}$
 $\ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{0}$
 $\dot{\vec{r}}_{CM} = \text{cost} \rightarrow \text{moto rettilineo uniforme}$

$\vec{F}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = M \vec{r}_{CM}$
 $\vec{F}$ agente sul CM

$M \ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F}$

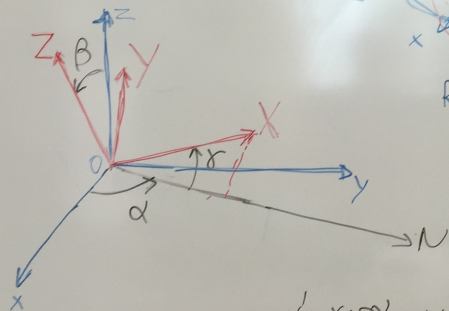
$\vec{F} = \vec{0}$

$\vec{F}_{CM} = \vec{0}$

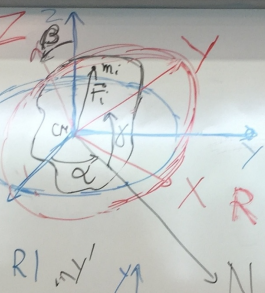
$\vec{F}_{CM} = \text{cost} \rightarrow \text{moto rettilineo uniforme}$

In RI $\rightarrow \vec{F}_{CM} = (0, 0, 0)$

i, m_i $\vec{F}_i$ rispetto al CM



$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$



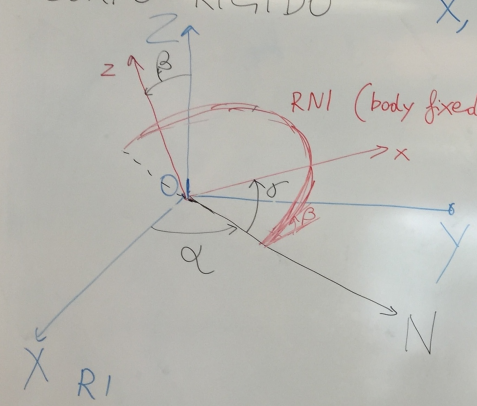
α, β, γ

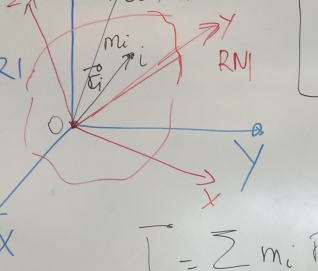
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$z' = z$

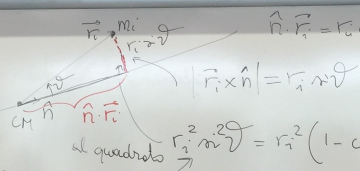
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\vec{F}_i$, $(\dot{\vec{F}}_i)_{RNI} = 0$ $\dot{\vec{F}}_i = \vec{\omega} \times \vec{F}_i$ $\dot{\vec{\omega}}_{R1} = \dot{\vec{\omega}}_{RNI}$ $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{F}}_i \cdot \dot{\vec{F}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{F}}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$
 $\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{R1} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RNI} + \vec{\omega} \times \vec{G}$ $m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{p}_i$ $\text{quantità di moto lineare}$ $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ $\text{quantità di moto angolare di tutto il corpo rigido che ruota a velocità angolare } \vec{\omega}$
 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ $\text{momento di inerzia}$ $T = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$

CORPO RIGIDO $X, Y, Z \rightarrow x, y, z$

 1: α attorno a Z $X \rightarrow N$ $\text{Rot}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 2: β attorno a N $Z \rightarrow Z'$ $\text{Rot}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$
 3: γ attorno a Z' $N' \rightarrow x$ $\text{Rot}_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rot}_\alpha} \begin{pmatrix} N \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rot}_\beta} \begin{pmatrix} N' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rot}_\gamma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$


 $\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{R1} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{RNI} + \vec{\omega} \times \vec{G}$ $\vec{F}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{F}}_i \cdot \dot{\vec{F}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{F}}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$
 $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \left(\vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \right)$ $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ $T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega \hat{n} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \left(r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2 \right) = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2$
 $I_{\hat{n}} = \sum_i m_i \left(r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2 \right)$ $\text{momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione}$

$$(I_{\hat{n}})_i = m_i (r_i^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_i)^2)$$



$$\hat{n} \cdot \vec{r}_i = r_i \cos \vartheta$$

$(I_{\hat{n}})_i$: momento d'inerzia della massa m_i rispetto all'asse $\hat{n}$

$$(I_{\hat{n}})_i = m_i (\vec{r}_i \times \hat{n})^2$$

Momento d'inerzia di una massa m rispetto ad un asse indicato dal suo versore $\hat{n}$

def. Prodotto delle masse m per la distanza (minima) di m dall'asse $\hat{n}$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\underline{I}}} \vec{\omega} \equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

vel. angolari

$$[L] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

mom. inerzia

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$$

$$r_i^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 \omega_x - x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)) \\ \sum_i m_i (r_i^2 \omega_y - y_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)) \\ \sum_i m_i (r_i^2 \omega_z - z_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\underline{I}}} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

