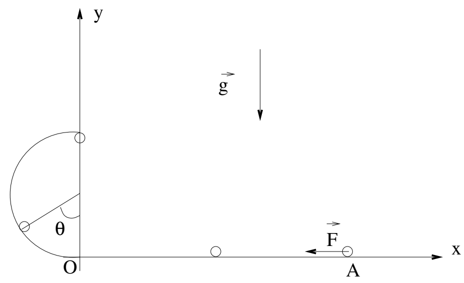
Compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni del 5 settembre 2017: testo e soluzioni



Problema 1: Si consideri il sistema in figura. Un corpo di massa m =1.30 kg si trova nel punto A di un piano orizzontale liscio. A tale corpo, per un certo intervallo di tempo Δt =3.20 s, viene applicata una forza esterna orizzontale di modulo F =11.0 N. Dopo, il corpo entra in una guida semicircolare liscia di raggio R =0.990 m, come in figura. Determinare:

1. il modulo della velocità con cui il corpo entra nella guida semicircolare. (1,0)

   v_0 [m/s] = ☐ A $\boxed{27.1}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Quando il corpo passa dalla posizione individuata dall'angolo θ =1.00 Rad (vd. figura), determinare:

2. il modulo della velocità del corpo; (2,0)

   v [m/s] = ☐ A $\boxed{26.9}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

3. il modulo della reazione esercitata dalla guida sul corpo. (3,0)

   R_{guida} [N] = ☐ A $\boxed{958}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Si supponga adesso di poter variare il modulo della forza iniziale F. Determinare:

4. il valore minimo per il modulo della forza tale per cui il corpo arrivi nel punto più alto della guida. (3,0)

   F_{min} [N] = ☐ A $\boxed{2.53}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Si supponga adesso che il modulo della forza iniziale sia F_{new} =16.0 N. Dato il sistema di coordinate x, y in figura, determinare:

5. l'ascissa $x_{impatto}$ del punto di impatto del corpo con il piano orizzontale liscio, dopo che questo sarà uscito dalla guida, passando per il punto più alto della guida stessa. (3,0)

   $x_{impatto}$ [m] = ☐ A $\boxed{24.7}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Punteggio totale problema 1: 12 punti da rinormalizzare a 16

Soluzione del problema 1

1. Il moto per il dempo Δt è uniformemente accelerato, per cui lungo l'asse delle x

   $$v_0 = a\Delta t$$

   Dalla seconda legge di Newton,

   $$a_x = -F/m$$

   Quindi si ha che $v_x = -F/m\Delta t$ e il suo modulo vale $v_0 = F/m\Delta t$

2. Imponiamo la ceonservazione dell'energia meccanica, e quindi

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\vartheta)$$

   Da questa ricaviamo che

   $$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\vartheta)} = \sqrt{(\frac{F\Delta t}{m})^2 - 2gR(1-\cos\vartheta)}$$

3. Lungo la direzione radiale, la seconda legge di Newton si scrive come

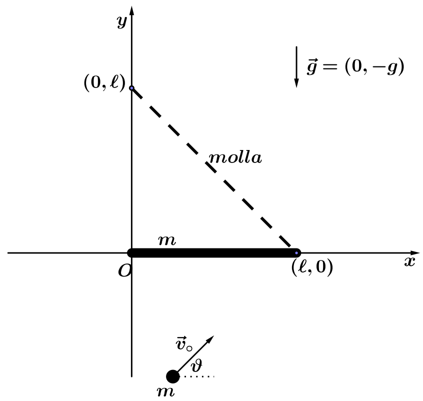
   $$m\frac{v^2}{R} = R_{guida} - mg\cos\vartheta$$

   Sostituendo le varie espressioni trovate precedentemente otteniamo

   $$R_{guida} = \frac{F^2\Delta t^2}{mR} + (3\cos\vartheta - 2)mg$$

4. La condizione richiesta è che il corpo arrivi in cima alla guida con velocità nulla. Quindi, usando di nuovo la conservazione dell'energia
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgR$$
Pertanto, in questo caso,
$$v_0 = \frac{F_{min}}{m}\Delta t = \sqrt{4gR}$$
da cui
$$F_{min} = \frac{m}{\Delta t}\sqrt{4gR}$$

5. Essendo $F_{new} > F_{min}$ il corpo arriverà nel punto più alto della guida con una velocità solo orizzontale diversa da zero. Il suo valore si può di nuovo trovare con la conservazione dell'energia e vale
$$v_{top} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$$
Il moto dopo è un semplice moto parabolico descritto dalle equazioni
$$x(t) = v_{top}t$$
$$y(t) = 2R - \frac{1}{2}gt^2$$
Il tempo d'impatto si trova imponendo $y(t_{impatto}) = 0$, e quindi
$$t_{impatto} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$
L'ascissa richiesta è
$$x_{impatto} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}\sqrt{\frac{4R}{g}} = \sqrt{4\frac{F_{new}^2\Delta t^2 R}{m^2 g} - 16R^2}$$



Problema 2: Una sbarretta rigida sottile di massa $m = 105$ grammi e lunghezza $\ell = 0.5\,\mathrm{m}$ è incernierata ad un estremo in O in modo da poter ruotare nel piano verticale x, y in presenza della accelerazione locale di gravità $\vec{g} = (0, -g)$ ($g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$), e si trova in posizione orizzontale (vedi figura). Nel punto di coordinate $(0, \ell)$ è fissata una molla di lunghezza a riposo nulla il cui altro estremo è agganciato alla estermità libera della sbarretta in posizione $(\ell, 0)$.

Caso 1. La sbarretta ha densità lineare uniforme λ_1.

1. Calcolate la costante elastica k_1 che deve avere la molla per tenere la sbarretta in equilibrio in posizione orizzontale. (4,0)

   k_1 [N/m =] ☐ A $\boxed{1.03}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

Caso 2. In questo caso la sbarretta ha stessa massa m e lunghezza ℓ ma densità lineare $\lambda(x) = \lambda_2(1 + \frac{x}{\ell})$.

2. Calcolate λ_2. (2,0)

   λ_2 [kg/m] = ☐ A $\boxed{0.14}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

3. Calcolate la coordinata x_{CM2} del centro di massa della sbarretta del caso 2 sull'asse x. (3,0)

   x_{CM2} [m] = ☐ A $\boxed{0.28}$ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

4. Calcolate la costante elastica k_2 che deve avere la molla per tenere la sbarretta del caso 2 in equilibrio in posizione orizzontale. (3,0)

   k_2 [m] = $\boxed{}$ A $\boxed{1.14}$ B □   C □   D □   E □

Caso 1bis. Mentre la sbarretta di densità uniforme (caso 1) è in posizione di equilibrio viene lanciata una pallina puntiforme avente la stessa massa m della sbarretta e una velocitÃă costante $\vec{v}_\circ$ ($v_\circ$ =1 km/h) diretta contro la sua estremità $(\ell, 0)$ ad un angolo ϑ con la direzione orizzontale. Trascurate l'effetto della gravità sulla pallina e assumete che l'urto con la sbarretta sia anelastico.

5. Scrivete la velocità angolare ω_{1bis} con la quale la sbarretta inizia a ruotare nel piano x, y attorno al punto O e calcolatene il valore numerico per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (come in figura). (4,0)

   ω_{1bis} [rad/s] = $\boxed{}$ A $\boxed{0.29}$ B □   C □   D □   E □

Punteggio totale problema 2: 16 punti

Soluzione del problema 2

1. $\vec{r}_{CM} = (\frac{\ell}{2}, 0)$ vettore posizione del centro di massa della sbarretta di densità uniforme quando si trova in posizione orizzontale
   $\vec{F}_{grav1} = (0, -mg)$ forza gravitazionaale sulla sbarretta applicata nel suo centro di massa
   $N_{grav1} = -mg\frac{\ell}{2}$ momento rispetto al punto O esercitato dalla forza di gravità sulla sbarretta, applicata nel suo centro di massa. È un vettore perpendicolare al piano x, y, produce in tutta evidenza una rotazione in senso orario e perciò è negativo
   $\vec{F}_{el1} = (-k_1\sqrt{2}\ell\cos\frac{\pi}{4}, +k_1\sqrt{2}\ell\sin\frac{\pi}{4})$ forza elastica di richiamo esercitata dalla molla sulla sbarretta applicata alla sua estremità di coordinate $(\ell, 0)$
   $N_{el1} = (k_1\sqrt{2}\ell\sin\frac{\pi}{4})\ell = k_1\ell^2$ momento rispetto al punto O esercitato dalla forza di richiamo elastica. È un vettore perpendicolare al piano x, y; produce una rotazione in senso antiorario e perciò è positivo
   $N_{grav1} + N_{el1} = 0$ condizione di equilibrio della sbarretta
   $N_{grav1} + N_{el1} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{mg}{2\ell}$ valore delle costante elastica della molla per il quale la sbarretta è in equilibrio

2. $\lambda(x) = \lambda_2(1 + \frac{x}{\ell})$
   Per trovare λ_2 calcoliamo la massa totale m della sbarretta con densità lineare $\lambda(x)$:
   $m = \int_0^\ell \lambda(x) = \lambda_2\ell + \lambda_2\frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}\lambda_2\ell \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{m}{\ell} \quad (\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1)$

3. Usiamo la definizione di centro di massa per la sua componente lungo l'asse x:
   $x_{CM2} = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\,dm = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\lambda(x)dx = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\lambda_2(1 + \frac{x}{\ell})dx = \frac{5}{6}\frac{\lambda_2\ell^2}{m} = \frac{5}{9}\ell$
   $\left(\frac{x_{CM2}}{x_{CM1}} = \frac{10}{9} > 1\right)$

4. $\vec{F}_{grav2} = \vec{F}_{grav1}$ la forza gravitazionale sulla sbarretta è sempre la stessa però è applicata nel nuovo centro di massa calcolato al punto 3
   $N_{grav2} = -mg\frac{5}{9}\ell$ momento rispetto al punto O esercitato dalla forza gravitazionale applicata nel centro di massa calcolato al punto 3. Agisce in senso orario quindi è negativo.
   $\vec{F}_{el2} = (-k_2\sqrt{2}\ell\cos\frac{\pi}{4}, +k_2\sqrt{2}\ell\sin\frac{\pi}{4})$ forza elettrica di richiamo della molla applicata alla estremità $(\ell, 0)$ della sbarretta (stessa formula che al punto 1 ma con costante elastica k_2)
   $N_{el2} = (k_2\sqrt{2}\ell\sin\frac{\pi}{4})\ell = k_2\ell^2$ momento della forza elastica rispetto al punto O; agisce in senso antiorario e quindi è positivo (stessa formula che al punto 1 ma con costante elastica k_2)
   Imponiamo la condizione di equilibrio epr trovare k_2:
   $N_{grav2} + N_{el2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{mg}{\ell}\frac{5}{9}$ valore delle costante elastica della molla per il quale la sbarretta non omogenea del caso 2 è in equilibrio
   Nota: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{10}{9} > 1$ è ovviamente lo stesso rapporto delle posizioni del centro di massa nei due casi

5. $L_{DaUrto} = m(v_o \sin\vartheta)\ell$ momento angolare di rotazione attorno al punto O trasferito dall'urto anelastico della pallina
   $I_{tot-O} = (\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}) + m\ell^2 = \frac{4}{3}m\ell^2$ momento di inerzia totale rispetto al punto O del sistema sbarretta +pallina che in seguito all'urto anelastico si trova nel punto $(\ell, 0)$
   Il momento angolare di rotazione attorno al punto O acquistato dal sistema sbarretta+pallina è, per la conservazione del momento angolare totale, uguale a quello trasferito dall'urto anelastico e imponendo questa uguaglianza troviamo al velocità angolare ω_{1bis} acquistata da sbarretta+pallina al momento dell'urto:
   $L_{acquistato} = I_{tot}\omega_{1bis} \quad \Rightarrow \quad \omega_{1bis} = \frac{3}{4}\frac{v_\circ}{\ell}\sin\vartheta$