

Nome

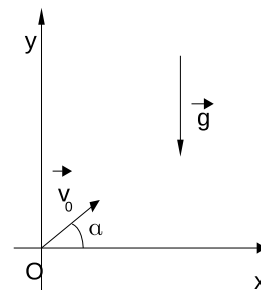
Cognome

Numero di matricola

Compito di Fisica Generale 1 + Esercitazioni del 07/02/2018.

- Modalità di risposta: si scriva la formula risolutiva nell'apposito riquadro e si barri la lettera associata al valore numerico corretto. Si effettuino entrambe le operazioni, scrivendo prima la formula e poi calcolando il valore numerico, senza mescolare le cose. Tra le alternative numeriche proposte c'è sempre la risposta corretta. Salvo specifica richiesta, i valori numerici sono approssimati con tre cifre significative (Es.: 1.3051×10^{-2} diventa 1.31×10^{-2} o 0.0131). L'approssimazione va eseguita solo alla fine e non ad ogni passaggio intermedio. Attenzione: si svolga l'esercizio sui fogli protocollo assegnati. Se la soluzione scritta nel riquadro non viene ritrovata su tali fogli, la risposta, anche se corretta, non verrà considerata valida!
- Accanto ad ogni domanda è riportato il seguente punteggio: (xx,yy). "xx" indica il punteggio che si ottiene rispondendo correttamente; "yy" indica l'eventuale penalizzazione per ogni risposta sbagliata.
- Si assuma per l'intensità dell'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre il valore $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

Problema 1: Si consideri il sistema in figura. Al tempo $t_0 = 0 \text{ s}$ un corpo puntiforme viene lanciato da terra con una velocità iniziale \vec{v}_0 di cui sappiamo solo che forma con il terreno un angolo $\alpha = 0.510 \text{ rad}$. Sappiamo inoltre che al tempo $t_c = 5.10 \text{ s}$ il corpo tocca di nuovo terra. Si chiede di scrivere tutte le grandezze elencate di seguito in funzione soltanto delle grandezze note α e t_c , e di calcolarne quindi il valore numerico. Determinare:



1. il modulo della velocità iniziale \vec{v}_0 del corpo; (4,0)

$$v_0 \text{ [m/s]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{14.0} \quad \text{B } \boxed{39.7} \quad \text{C } \boxed{51.2} \quad \text{D } \boxed{7.21} \quad \text{E } \boxed{12.5}$$

2. la distanza d del punto di caduta dall'origine degli assi scelti (punto O in figura); (4,0)

$$d \text{ [m]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{197} \quad \text{B } \boxed{46.2} \quad \text{C } \boxed{93.4} \quad \text{D } \boxed{261} \quad \text{E } \boxed{228}$$

- 3.a l'altezza massima raggiunta dal corpo nel suo moto: scrivete h_{max} in funzione di t_c e calcolatene il valore numerico; (2,0)

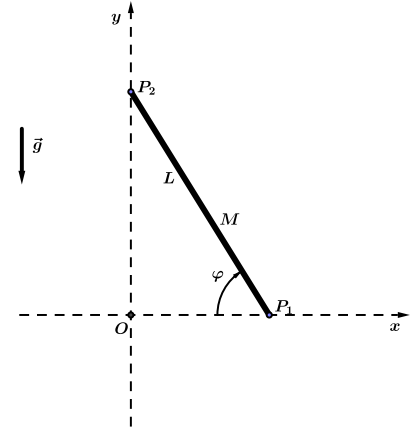
$$h_{max} \text{ [m]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{7.41} \quad \text{B } \boxed{4.53} \quad \text{C } \boxed{2.88} \quad \text{D } \boxed{14.0} \quad \text{E } \boxed{31.9}$$

- 3.b scrivete h_{max} in funzione di α . (2,0)

4. Determinare il modulo della velocità del corpo al tempo in cui esso raggiunge l'altezza massima h_{max} calcolata precedentemente. (4,0)

$$v_{y=h_{max}} \text{ [m/s]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{70.3} \quad \text{B } \boxed{14.2} \quad \text{C } \boxed{18.9} \quad \text{D } \boxed{11.5} \quad \text{E } \boxed{44.7}$$

Problema 2: Una scala, che per semplicità schematizziamo come una sbarra uniforme di massa $M = 4.30$ kg e lunghezza $L = 4.00$ m, le cui estremità indichiamo con i punti P_1 e P_2 , è appoggiata ad una parete verticale con il punto P_2 e al suolo con il punto P_1 (vedi figura). Indichiamo con φ l'angolo che la scala forma con l'asse orizzontale x . Lungo l'asse x c'è un coefficiente di attrito statico $\mu_S = 0.350$ mentre lungo la parete verticale non c'è attrito. La scala si può muovere solo nel piano x, y .



1. Calcolate il valore minimo φ_0 dell'angolo φ al di sotto del quale l'estremità P_1 della scala scivolerebbe verso la direzione positiva dell'asse x . (Indicazioni: affinché la scala resti ferma e il punto P_1 non si muova occorre imporre che la risultante di tutte le forze lungo x e lungo y sia nulla; bisogna inoltre imporre che sia nullo il momento totale delle forze che farebbe ruotare la scala attorno ad un opportuno polo. Da notare che se si cerca l'equilibrio, si può scegliere il polo più comodo per il calcolo dei momenti.) (5,0)

$$\varphi_0 \text{ [rad]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{0.137} \quad \text{B } \boxed{0.866} \quad \text{C } \boxed{0.807} \quad \text{D } \boxed{1.06} \quad \text{E } \boxed{0.960}$$

Una persona, che immaginiamo puntiforme e di massa $m = 61.0$ kg, si trova in cima alla scala nel punto P_2 .

2. Calcolate il valore minimo φ_1 dell'angolo φ al di sotto del quale, in presenza anche della massa m , l'estremità P_1 della scala scivolerebbe verso la direzione positiva dell'asse x . (Indicazioni: procedete come nel caso precedente aggiungendo solo la forza peso agente sulla massa m e anche il contributo di tale forza al momento totale delle forze attorno ad un opportuno polo.) (5,0)

$$\varphi_1 \text{ [rad]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{0.166} \quad \text{B } \boxed{2.10} \quad \text{C } \boxed{1.22} \quad \text{D } \boxed{0.384} \quad \text{E } \boxed{1.46}$$

3. Calcolate il momento di inerzia I della scala rispetto ad un asse perpendicolare al piano x, y passante per il punto P_1 . (2,0)

$$I \text{ [kg m}^2\text{]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{68.0} \quad \text{B } \boxed{13.3} \quad \text{C } \boxed{25.3} \quad \text{D } \boxed{22.9} \quad \text{E } \boxed{10.2}$$

Nella situazione del punto 2, con la massa m in cima alla scala, improvvisamente non c'è più attrito col terreno lungo l'asse x . La caduta avviene con l'estremità P_2 della scala, dove si trova anche la massa puntiforme m , sempre a contatto (senza attrito) con l'asse verticale y .

4. Calcolate la velocità finale v_f con cui la massa m arriva a terra. (Indicazioni: si può assumere che poco prima della caduta finale la scala ruoti attorno ad un asse istantaneo perpendicolare al piano x, y e passante per il suo punto di appoggio in P_1 . Applicate la conservazione dell'energia del sistema scala + persona tra l'istante iniziale, in cui tutto il sistema è fermo, e l'istante finale in cui la scala è a terra in posizione orizzontale e la massa m tocca terra con la sua massima velocità v_f). (4,0)

$$v_f \text{ [m/s]} = \boxed{} \quad \text{A } \boxed{1.87} \quad \text{B } \boxed{8.64} \quad \text{C } \boxed{4.61} \quad \text{D } \boxed{0.693} \quad \text{E } \boxed{0.605}$$

Soluzione del problema 1

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}x(t) &= (v_o \cos \alpha)t \\y(t) &= (v_o \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

e per le velocità abbiamo

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_o \cos \alpha \\v_y(t) &= v_o \sin \alpha - gt\end{aligned}$$

1. Quando il corpo tocca di nuovo terra al tempo t_c ovviamente vale $y(t_c) = 0$. Quindi deve essere:

$$(v_o \sin \alpha)t_c - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0$$

da cui ricaviamo v_o in funzione soltanto di α e t_c :

$$v_o = \frac{gt_c}{2 \sin \alpha}$$

2. La distanza d dall'origine quando tocca terra si trova imponendo: $d = x(t_c)$. Quindi:

$$d = v_o \cos \alpha t_c = \frac{gt_c^2}{2 \tan \alpha}$$

3. Al tempo $t_{h_{max}}$ quando il corpo raggiunge l'altezza massima h_{max} deve valere $v_y(t_{h_{max}}) = 0$. Imponendo questa relazione otteniamo: $t_{h_{max}} = v_o \sin \alpha / g$ e quindi $t_{h_{max}} = t_c / 2$, come potevamo immaginare sapendo che la traiettoria è una parabola rovesciata con il vertice nel punto in cui il corpo raggiunge la massima altezza da terra. Sostituendo questo valore in $y(t_{h_{max}})$ otteniamo h_{max} :

$$h_{max} = y(t_{h_{max}}) = \frac{1}{8}gt_c^2$$

Da questa formula sembrerebbe che h_{max} non dipenda dall'angolo di lancio α , cosa che intuitivamente non torna: se $\alpha = \pi/2$ il corpo dovrebbe arrivare più in alto. Ma la formula è corretta. Se usiamo la risposta 1 e scriviamo t_c in funzione di v_o abbiamo:

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

da cui si vede che h_{max} dipende da α (ed è massima per $\alpha = \pi/2$, cioè quando il lancio è verticale). Questa relazione si poteva ottenere anche scrivendo la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale e quello in cui il corpo raggiunge l'altezza massima.

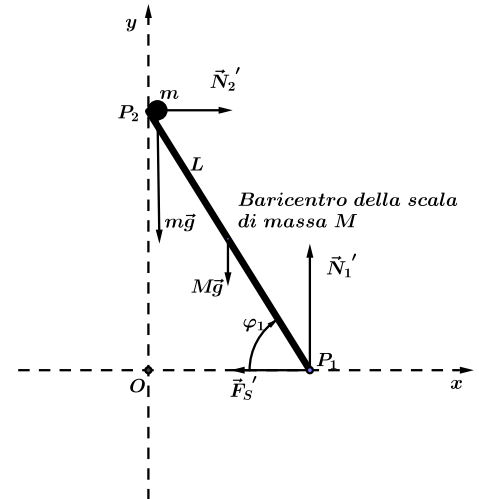
4. Quando il punto raggiunge l'altezza massima h_{max} , come detto, $v_y = 0$, e quindi

$$v_{y=h_{max}} = v_o \cos \alpha = \frac{gt_c}{2 \tan \alpha}$$

che è anche la velocità iniziale lungo x . Infatti la quantità di moto lineare lungo x si deve conservare perché l'unica forza in gioco è diretta lungo y e non ci sono forze lungo x .

Soluzione del problema 2

In figura sono mostrate le forze in gioco nel caso più generale in cui c'è anche la persona (puntiforme) di massa m in cima alla scala. (Nota: il testo dice che la possiamo considerare posizionata esattamente in P_2 , ma per maggiore comprensione visiva la disegniamo un pochino spostata da P_2).



1. Affinché la scala non si muova, una condizione è che la risultante $\vec{F} = (F_x, F_y)$ di tutte le forze in gioco sia nulla:

$$\begin{aligned} F_x &= N_2 - F_S = N_2 - \mu_s N_1 = 0 & (F_S = \mu_s N_1) \\ F_y &= N_1 - Mg = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo N_1 ed N_2 :

$$\begin{aligned} N_1 &= Mg \\ N_2 &= \mu_s Mg . \end{aligned}$$

Prendiamo come polo della rotazione il punto P_1 e imponiamo che il momento totale delle forze attorno ad un asse perpendicolare al piano x, y e passante per P_1 sia nullo (ricordiamo che il segno è positivo per una rotazione in senso antiorario):

$$-N_2 L \sin \varphi_0 + Mg \frac{L}{2} \cos \varphi_0 = 0$$

e quindi abbiamo la condizione sul valore minimo di φ , che abbiamo indicato come φ_0 affinché la scala resti ferma:

$$\tan \varphi_0 = \frac{1}{2\mu_s}$$

Si noti che l'angolo minimo rispetto al terreno per il quale la scala non si muove dipende solo dal coefficiente di attrito statico μ_s , non dalla massa né dalla lunghezza della scala (ovviamente μ_s dipende non solo dal tipo di suolo su cui si appoggia la scala ma anche dal tipo di base/piedi di cui è dotata, quindi dato un certo terreno non tutte le scale sono ugualmente stabili).

2. Al caso precedente dobbiamo aggiungere la forza peso della persona in cima alla scala e il momento che essa genera. Le notazioni sono quelle indicate in figura. Per le forze vale:

$$\begin{aligned} F'_x &= N'_2 - F'_S = N'_2 - \mu_s N'_1 = 0 & (F'_S = \mu_s N'_1) \\ F'_y &= N'_1 - Mg - mg = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo N'_1 ed N'_2 :

$$\begin{aligned} N'_1 &= (M + m)g \\ N'_2 &= \mu_s (M + m)g . \end{aligned}$$

Per il momento delle forze vale:

$$-N'_2 L \sin \varphi_1 + Mg \frac{L}{2} \cos \varphi_1 + mgL \cos \varphi_1 = 0$$

e quindi abbiamo la condizione sul valore minimo di φ , che abbiamo indicato come φ_1 affinché la scala resti ferma:

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{2\mu_s} \left(1 + \frac{m}{M + m} \right).$$

Se scriviamo questo risultato nella forma:

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{2 \left[\mu_s / \left(1 + \frac{m}{M+m} \right) \right]} = \frac{1}{2\mu'_s}$$

essendo $\mu'_s = \frac{\mu_s}{\left(1 + \frac{m}{M+m} \right)} < \mu_s$ appare chiaro che l'effetto della persona in cima alla scala è quello di diminuire il coefficiente di attrito statico, e quindi di rendere il tutto più instabile, come è intuitivo.

3. Chiamiamo λ la densità di massa lineare della scala-barra e ℓ la coordinata lungo la barra. Il momento di inerzia richiesto è:

$$I = \int_0^L \ell^2 dm = \lambda \int_0^L \ell^2 d\ell = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

4. L'energia totale all'istante iniziale è solo potenziale e vale:

$$E_i = mgL \sin \varphi_1 + Mg \frac{L}{2} \sin \varphi_1 = gL \sin \varphi_1 \left(m + \frac{M}{2} \right) .$$

L'energia totale all'istante finale è solo cinetica. Si tratta della energia cinetica della persona che arriva al suolo con la massima velocità lineare, lungo y , v_f e della energia cinetica di rotazione della scala che ha raggiunto la sua massima velocità angolare ω_f . Quindi:

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 .$$

Se, come dice il testo, nella fase finale della caduta la scala ruota attorno a P_1 , allora vuol dire che $v_f = \omega_f L$. Sostituendo sopra e usando I come calcolato al punto 3 abbiamo:

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{6} M v_f^2 = \frac{1}{2} v_f^2 \left(m + \frac{M}{3} \right) .$$

e imponendo $E_i = E_f$ troviamo:

$$\begin{aligned} v_f^2 &= 2gL \sin \varphi_1 \frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}} \\ v_f &= \sqrt{2gL \sin \varphi_1 \frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}} . \end{aligned}$$

Si noti che la stessa formula scritta sopra per E_f , e quindi lo stesso valore per v_f , si otterrebbero considerando l'energia finale tutta di rotazione (attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per il punto di contatto P_1), cioè considerando la persona solidale con la barra nel punto P_2 e quindi rotante con essa. In questo caso si ha:

$$E_f = \frac{1}{2} I_{tot} \omega_f^2$$

ed essendo $I_{tot} = \frac{1}{3} ML^2 + mL^2$ e $v_f = \omega_f L$ si ottiene:

$$E_f = \frac{1}{2} \omega_f^2 L^2 \left(m + \frac{M}{3} \right) = \frac{1}{2} v_f^2 \left(m + \frac{M}{3} \right)$$

che è la stessa formula per E_f che abbiamo trovato sopra.