Fisica I, *a.a.* 2016–2017 – Secondo compitino

25 Maggio 2017

1 Problema n. 1

Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota attorno al proprio centro di massa con velocità angolare ω. Due masse uguali $m_1 = m_2 = m$ sull?asse y del disco a distanza $r = R/2$ dall?origine ciascuna bloccata da un gancio. Determinare nel sistema di riferimento solidale al disco (sistema x, y in figura):

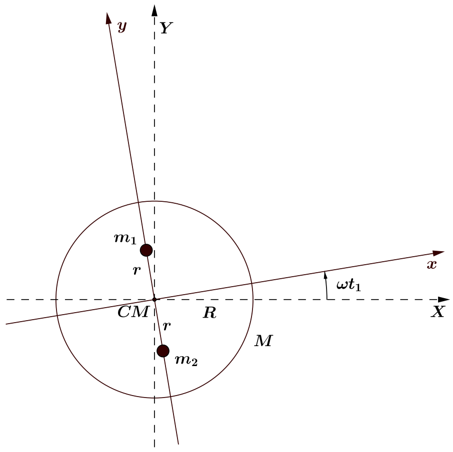

Figura 1

1. Le componenti y delle forze $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, che agiscono su m_1 e su m_2 rispettivamente, e che vengono compensate dal rispettivo gancio.

Ad un certo istante t_1 le masse m_1 ed m_2 vengono sganciate, e si possono muovere senza attrito sul disco. Determinare:

2. Il momento d'inerzia del sistema disco + masse rispetto al centro di massa del disco;
3. Dire per ciascuna massa a quale altra forza è soggetta oltre a quella determinata precedentemente. Dire inoltre se a causa di essa arriverà al bordo con una coordinata x nulla, positiva o negativa.

Ad un certo istante t_2 le due masse arrivano al bordo del disco e vengono istantaneamente bloccate. Determinare:

4. Il momento di inerzia del sistema disco + masse rispetto al centro del disco;
5. La velocità angolare *omega*$_2$ di rotazione del disoc al tempo t_2.

2 Soluzione n. 1

1. Nel sistema x, y rotante con il disco le masse sono ferme, quindi la sola forza agente su di esse è quella centrifuga, diretta lungo l'asse y. Su m_1: $\vec{f_1} = (0, m\omega^2 r)$; su m_2: $\vec{f_2} = (0, -m\omega^2 r)$.
2. Con le masse ferme nella posizione indicata in figura il momento di inerzia rispetto al centro di massa è: $I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr^2$
3. Una volta sganciate, su entrambe le masse agisce la forza centrifuga, che le fa muovere radialmente verso l'esterno del disco. A causa di questa velocità non nulla interviene la forza di Coriolis che spinge ogni massa in verso opposto alla rotazione. Quindi, m_1 arriva al bordo con $x > 0$ e m_2 con $x < 0$.
4. Cone le due masse fisse al bordo il momento di inerzia del sistema rispetto al centro di massa è: $I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2$.
5. Poiché non ci sono momenti di forze applicate il momento angolare totale del sistema si deve conservare. Allo sgancio: $L_1 = I_1\omega$, $I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr^2$; al bordo: $L_2 = I_2\omega_2$, $I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2$ con $I_2 > I_1$. $L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega < \omega$.

3 Problema n. 2

Una massa puntiforme m si trova ad altezza h dal suolo come in figura. Viene lasciata cadere liberamente (partendo da ferma) sul sistema di due molle collegate da una sbarretta mostrato in figura e si aggancia istantaneamente nel punto P. Le due molle hanno la stessa lunghezza di riposo $\ell_\circ$ e costanti elastiche k_1 e k_2; molle e sbarretta hanno masse trascurabili rispetto ad m e non ci sono dissipazioni di energia. Quando il moto della massa m si arresta le molle risultano contratte di $\Delta\ell$. Determinare:

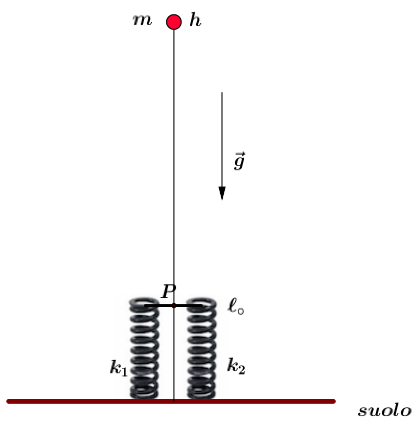

Figura 2

1. la costante elastica equivalente k delle due molle.
   Supponendo noto il valore k della costante equivalente, determinare:
2. la compressione $\Delta\ell$ delle molle assumendo di poter trascurare la variazione di energia potenziale gravitazionale dovuta a questa variazione di altezza.
3. Supponendo di NON poter trascurate la variazione di energia potenziale dovuta a $\Delta\ell$, scrivere l'equazione che $\Delta\ell$ deve soddisfare in questo caso.
4. Risolvere l'equazione trovata al punto precedente e determinare la soluzione fisica di $\Delta\ell$.
   Se la massa m viene posta in P da ferma anziché arrivarci in caduta, determinare:
4. l'accorciamento $\Delta\ell^*$ corrispondente alla posizione di equilibrio del sistema in cm.

4 Soluzione n. 2

1. Le molle sono in parallelo quindi le costanti elastiche si sommano: $k = k_1 + k_2$
2. Quando m arriva in P ha perso l'energia potenziale $mg(h-\ell_\circ)$ che aveva prima di essere rilasciata, che si è tutta trasformata in energia cinetica. Inoltre possiede l'energia potenziale gravitazionale corrispondente all'altezza $\ell_\circ$. Quando le molle hanno raggiunto la contrazione massima $\Delta\ell$ il sistema è fermo, l'energia potenziale elastica è $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ e quella potenziale gravitazionale è sempre quella all'altezza $\ell_\circ$ (data l'assunzione del testo). Per la conservazione dell'energia totale:
   $mg(h-\ell_\circ) + mg\ell_\circ = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + mg\ell_\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \sqrt{\frac{2mg(h-\ell_\circ)}{k}}$
3. La conservazione dell'energia corretta, non trascurando la variazione di energia potenziale dovuta all'accorciamento della molla, è:
   $mg(h-\ell_\circ) + mg\ell_\circ = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + mg(\ell_\circ - \Delta\ell) \quad \Rightarrow$
   $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - mg\Delta\ell - mg(h-\ell_\circ) = 0$ che è una equazione di secondo grado nella variabile $\Delta\ell$.
4. Le soluzioni sono:
   $\Delta\ell_{1,2} = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2k(h-\ell_\circ)}{mg}}\right)$

ma si vede con i valori numerici che l'unica soluzione possibile è: $\Delta\ell = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k(h-\ell_\circ)}{mg}}\right)$

5. All'equilibrio: $mg = k\Delta\ell^* \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell^* = \frac{mg}{k}$ quindi la soluzione precedente era:
   $\Delta\ell = \Delta\ell^* \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k(h-\ell_\circ)}{mg}}\right)$

5 Problema n. 3

Una trottola di massa m e momento di inerzia I rispetto all'asse di simmetria s tocca il suolo nel punto O attorno al quale può ruotare senza attrito con velocità angolare $\vec{\omega}$. L'asse s è inclinato di un angolo φ rispetto alla verticale, e il vettore posizione del centro di massa è $\vec{d}$ come mostrato in figura. Determinare:

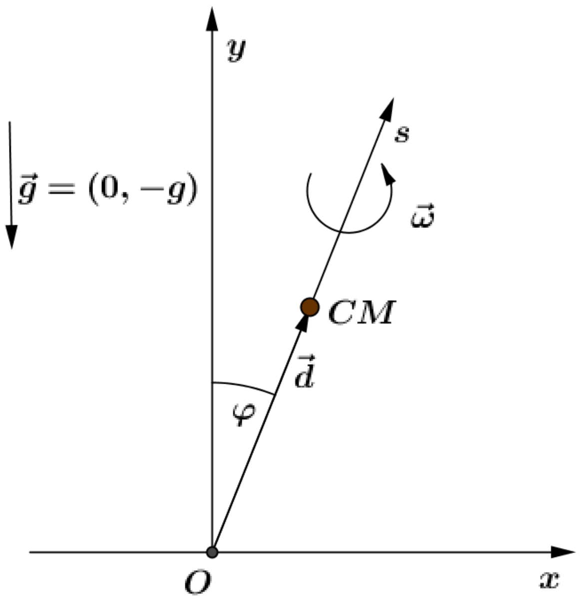

Figura 3

1. il modulo dle momento angolare di rotazione della trottola attorno all'asse s;
2. il momento $\vec{N}$ rispetto al punto O ha effetto sul momento angolate $\vec{L}$ della trottola in funzione dell'angolo φ, indicandone direzione e verso di $\vec{N}$. Descrivere anche il suo l'effetto su $\vec{L}$;
3. l'energia cinetica di rotazione della trottola attorno all'asse s.

Supponiamo che l'energia cinetica di rotazione attorno ad s sia almeno 10 volte maggiore del modulo del modulo del momento N. Determinare:

4. il valore massimo di φ in gradi affinché questo avvenga. Questo tipo di valutazione numerica è molto importante per capire se il momento angolare della precessione causata dal momento della forza gravitazionale si può trascurare o no rispetto al momento angolare di rotazione nel determinare il moto complessivo della trottola.

6 Soluzione n. 3

1. $\vec{L} = I\vec{\omega}$ $\quad L = I\omega$. $\vec{L}$ è parallelo ad $\vec{\omega}$.
2. $\vec{N} = \vec{d} \times m\vec{g}$ $\quad N = mgd\sin\varphi$ quindi conta solo la componente della forza gravitazionale perpendicolare a $\vec{d}$. $\vec{N}$ è perpendicolare la piano individuato da $\vec{L}$ (quindi $\vec{\omega}$) e dalla verticale y. $\vec{N}$ non fa variare il modulo di $\vec{L}$ ma ne cambia la direzione facendolo precedere attorno all'asse verticale y
3. $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ $\quad (T = 0.5 \times 6.3 \times 10^{-6} \times 62.8^2 = 1.24 \times 10^{-2}\,\mathrm{kgm^2s^{-2}})$
4. $\frac{1}{2}I\omega^2 \geqslant 10mgd\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \leqslant \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{10mgd}$