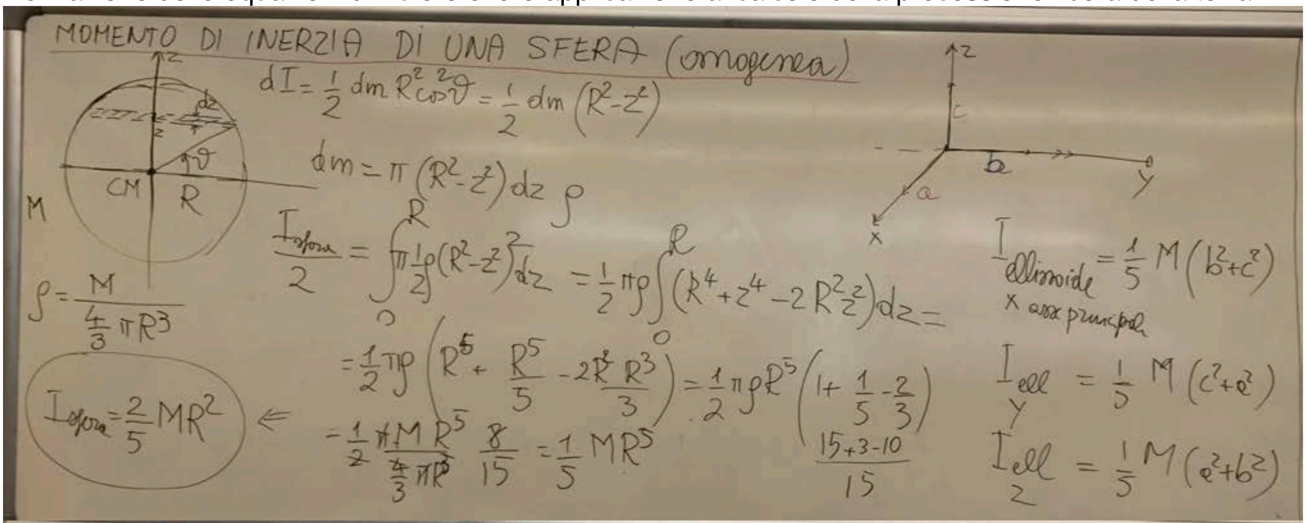
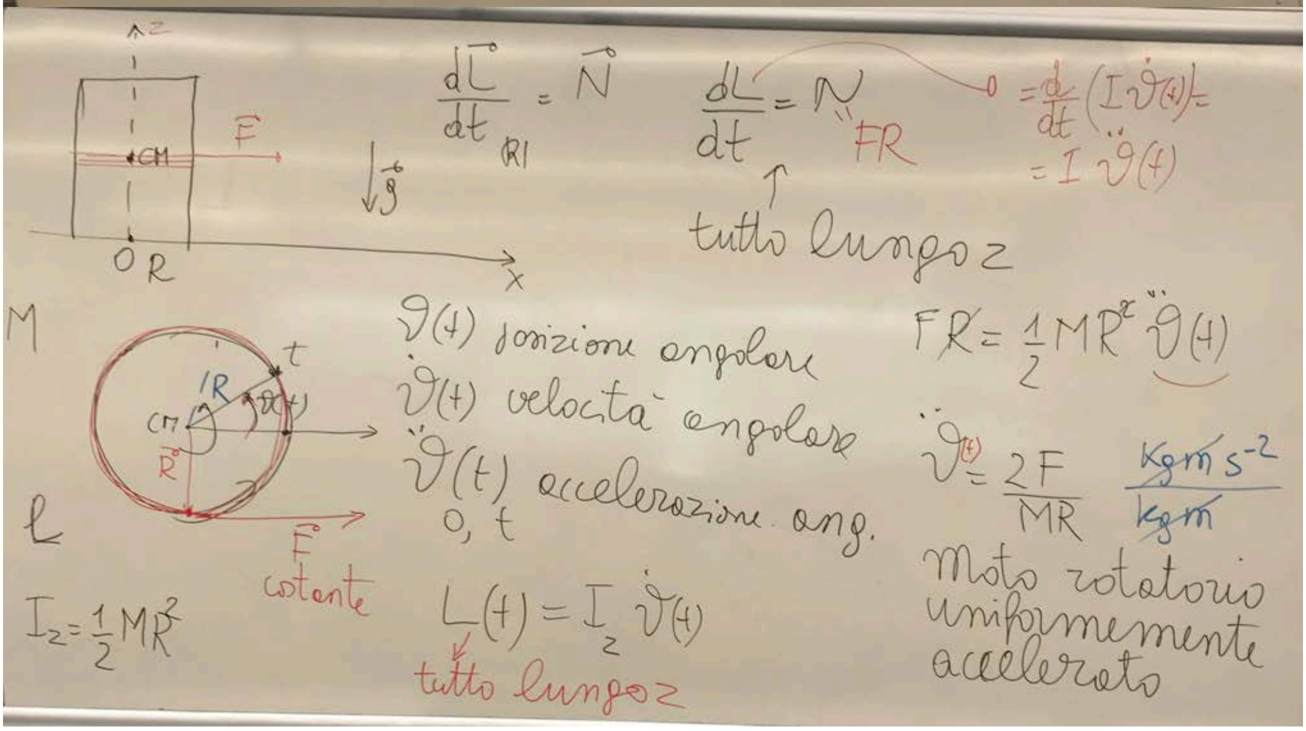
Lezione del 9 maggio 2017

Calcolo del momento d'inerzia di una sfera omogenea (usando quello di un disco); momenti di inerzia di un ellissoide triassiale.
Esercizio di in cilindro messo in rotazione con una cordicella; combinazione di moto di traslazione e rotazione; calcolo del lavoro fatto.
Derivazione delle equazioni di Eulero e loro applicazione al calcolo della precessione libera della terra.



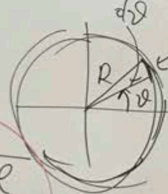


$$\dot\vartheta(t) = \frac{2F}{MR}\,t + \cancel{\dot\vartheta(0)} \;\rightarrow\; \vartheta(t) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}F}{MR}t^2 + \cancel{\vartheta(0)} = \frac{F}{MR}t^2$$

$$\ddot{x} = a_x = \frac{F}{M}$$

Calcolare $\dot\vartheta_{max} = \dot\vartheta(t^*)$

$$\boxed{\ell = R\,\vartheta(t^*)} = \cancel{R}\frac{F}{M\cancel{R}}t^{*2}$$



a t^* tutta la cordicella di lunghezza ℓ è srotolata

$$\ell = \frac{F}{M}t_*^2 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{M\ell}{F}}$$

$$\Rightarrow \dot\vartheta_{max} = \dot\vartheta(t^*) = \frac{2F}{MR}\underbrace{\sqrt{\frac{M\ell}{F}}}_{t^*} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{F\ell}{M}} \;\; \frac{rad}{s}$$

- $\dot\vartheta_{finale} = \dot\vartheta_{max} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{F\ell}{M}}$

$$T_{\substack{finale\\rotazione}} = \frac{1}{2}I\dot\vartheta^2_{finale} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M\cancel{R^2}\cdot\frac{4}{\cancel{R^2}}\frac{F\ell}{M} = F\ell \quad \text{ROTAZIONE}$$

- $\ddot x = a_x = \frac{F}{M} \qquad \dot x = v_x = \frac{F}{M}t + \cancel{\dot x(0)}$

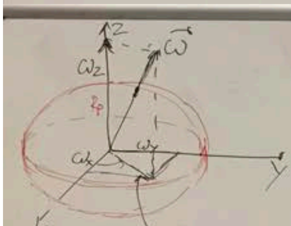
$$v_{x\,finale} = v_x(t^*) = \frac{F}{M}t^* = \frac{F}{M}\sqrt{\frac{M\ell}{F}} = \sqrt{\frac{F\ell}{M}}$$

$$T_{\substack{traslazione\\finale}} = \frac{1}{2}Mv^2_{x\,finale} = \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{F\ell}{\cancel{M}} = \frac{1}{2}F\ell$$

$$T_{\substack{totale\\finale}} = F\ell + \frac{1}{2}F\ell = \frac{3}{2}F\ell \quad \text{Lavoro (tutto) fatto da } \vec F$$

$$\mathcal{L}_{traslazione} = F\,x(t^*) \qquad x(t^*) = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^{*2} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}\frac{M\ell}{F} = \frac{1}{2}\ell \qquad \mathcal{L}_{tras} = \frac{1}{2}F\ell$$

$$\mathcal{L}_{rotazione} = N\Delta\vartheta = FR\Big(\overbrace{\frac{\ell}{R}}^{=\vartheta(t^*)}\Big) = F\ell$$



BF

$\vec\omega_{piano\ x,y} \neq 0$

$\omega_x, \omega_y \ll \omega_z$

$\vec N = \vec 0\ !!$

$I_1 = I_2$

$$\vec L = \begin{pmatrix} I_1\omega_x \\ I_2\omega_y \\ I_3\omega_z \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{RI}}_{=\vec N} = \begin{pmatrix} I_1\dot\omega_x \\ I_2\dot\omega_y \\ I_3\dot\omega_z \end{pmatrix} + \vec\omega\times\vec L \qquad \vec\omega\times \vec L = \begin{pmatrix} \omega_y L_z - \omega_z L_y \\ \omega_z L_x - \omega_x L_z \\ \omega_x L_y - \omega_y L_x \end{pmatrix}$$

ASSI PRINCIPALI

$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{BF}$$

$$\begin{cases} N_x = I_1\dot\omega_x + \omega_y L_z - \omega_z L_y \\ N_y = I_2\dot\omega_y + \omega_z L_x - \omega_x L_z \\ N_z = I_3\dot\omega_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x \end{cases} \qquad \begin{cases} N_x = I_1\dot\omega_x - \omega_y\omega_z(I_2 - I_3) \\ N_y = I_2\dot\omega_y - \omega_z\omega_x(I_3 - I_1) \\ N_z = I_3\dot\omega_z - \omega_x\omega_y(I_1 - I_2) \end{cases}$$

TERRA ISOLATA

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ 0 = I_2 \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_3 - I_1) \\ 0 = I_3 \dot{\omega}_z + 0 \implies \omega_z = \text{costante} \simeq \dfrac{2\pi}{86164} \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

EQ. di EULERO CORPO RIGIDO

$$\dot{\omega}_x = \omega_y \left[\omega_z \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right]$$

$$\dot{\omega}_y = -\omega_x \left[\omega_z \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right]$$

$I_3 > I_1$

$$\text{"}\Omega\text{"} = \omega_z \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) < 0$$

$$|\Omega| \ll \omega_z$$

$$\begin{cases} \underline{\ddot{\omega}_x = \dot{\omega}_y \Omega} = \underline{-\omega_x \Omega^2} \\ \underline{\ddot{\omega}_y = -\omega_y \Omega^2} \end{cases}$$

MOTO DI PRECESSIONE