Fisica Generale I con esercitazioni per studenti di Chimica.
Esercizi su argomenti del secondo semestre
proposti da Anna Nobili e Marco Mendolicchio, svolti in classe e raccolti da Marco Mendolicchio

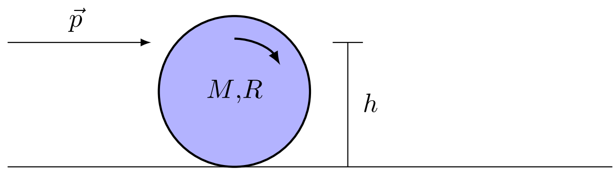
---

Esercitazione di Giovedì 11 maggio 2017

Anno accademico 2016-2017

Esercizio 1

Una palla da biliardo, rappresentata da una sfera omogenea di massa M e raggio R viene colpita con una stecca ad una altezza h rispetto alla superficie, imprimendo un impulso $\vec{p} = M\vec{v}$. Si determini il valore di h per cui il moto della sfera è di puro rotolamento dall'istante iniziale.



NB: Il moto di puro rotolamento si ha quando il corpo in questione rotola senza strisciare. Dal punto di vista matematico questo si traduce nel fatto che la velocità nel punto di contatto tra la sfera e il pavimento deve essere nulla. La velocità $\vec{v}_{\mathbf{P}}$ nel punto di contatto $\mathbf{P}$ è scrivibile come:

$$\vec{v}_{\mathbf{P}} = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

dove $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ è il vettore che identifica la velocità del centro di massa e $\vec{\omega}$ rappresenta la velocità angolare. Dunque se questa deve essere nulla avremo che:

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{R} = 0$$

Da questa espressione segue che il modulo della velocità del centro di massa v_{CM} vale ωR.
Lo stesso risultato è ottenibile considerando che se il corpo si muove senza strisciare l'avanzamento del centro di massa x_{CM} è uguale all'arco di circonferenza che tocca terra:

$$x_{\mathrm{CM}} = R\theta$$

dove θ rappresenta l'angolo che sottende l'arco in questione. Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{x}_{\mathrm{CM}} = R\dot{\theta} \quad \to \quad v_{\mathrm{CM}} = R\omega$$

Soluzione

Nel momento in cui la stecca colpisce la palla, le imprime un impulso $\vec{p} = M\vec{v}$. Tale impulso, che viene applicato ad una generica altezza h, in generale eserciterà un momento rispetto al centro di massa:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1}$$

dove $\vec{r}$ rappresenta il vettore posizione del punto in cui la stecca colpisce la palla rispetto al suo centro di massa. Notare che come vettore è perpendicolare al piano del foglio e con verso entrante. Quindi, passando dalla notazione vettoriale a quella in modulo:

$$L = p(h - R) = Mv(h - R) \tag{2}$$

dove $h - R$ rappresenta la distanza tra l'asse in cui si trova il vettore $\vec{p}$ e il centro di massa della sfera. Volendo caratterizzare il moto di rotazione della sfera possiamo utilizzare la relazione che collega il momento angolare alla velocità angolare di rotazione,

$$L = I\omega \tag{3}$$

dove il momento di inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro di massa è uguale a $2/5MR^2$ per una sfera omogenea con massa M e raggio R. Di conseguenza:

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2\omega \tag{4}$$

Le due espressioni di L coincidono, e quindi sono poste esplicitamente uguali:

$$Mv(h-R) = \frac{2}{5}MR^2\omega \tag{5}$$

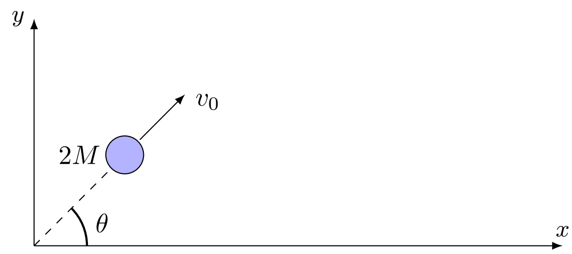
L'ultima operazione rimasta è quella di imporre la condizione di puro rotolamento ($v = \omega R$):

$$M\omega R(h-R) = \frac{2}{5}MR^2\omega \quad \rightarrow \quad h-R = \frac{2}{5}R \tag{6}$$

Concludendo, il valore di h desiderato è $h = \frac{7}{5}R$.

Esercizio 2

Un proiettile puntiforme di massa $2M$ è formato da due parti identiche collegate da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0. La molla ha inizialmente lunghezza nulla ed è bloccata in modo che il proiettile costituisca di fatto un corpo unico. Il proiettile è sparato con velocità iniziale di modulo v_0 da un cannone con angolo di inclinazione θ rispetto al suolo (vedi figura).



a) Nell'istante in cui il proiettile raggiunge la quota massima calcolare lo spazio percorso lungo l'asse x parallelo al suolo dal momento del lancio e il modulo della velocità.

b) Arrivato il proiettile alla quota massima, la molla si sgancia e le due parti che lo costituiscono, indicate con 1 e 2, si separano istantaneamente. Subito dopo la separazione si osserva che la parte 1 è ferma rispetto al suolo. Calcolare la costante elastica k della molla.

c) Successivamente le due parti, continuando il loro moto, raggiungono il suolo. Calcolare la distanza del cannone dai due punti di caduta.

Soluzione

Il corpo sparato dal cannone è composto da due masse di valore M collegate da una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo l_0, attualmente forzata ad avere una lunghezza nulla. Per questo motivo, il proiettile può essere identificato come un singolo corpo di massa $2M$.

a) Per determinare l'istante in cui il corpo raggiunge la massima altezza (t_M), calcoliamo x_M (ascissa del corpo corrispondente al punto di massima altezza) e v_M (modulo della velocità corrispondente al punto di massima altezza). Per fare ciò studiamo il problema in entrambe le dimensioni, iniziando a considerare separatamente le componenti della velocità iniziale della massa, e che l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ ha componente solo lungo y:

$$\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta) \qquad \vec{g} = (0, -g) \tag{7}$$

Possiamo dunque scrivere le equazioni del moto lungo entrambi gli assi e risolverle. Per l'asse y:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g \\ \dot{y} &= -gt + v_0 \sin\theta \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta t \end{aligned} \tag{8}$$

Procediamo in maniera analoga per la componente x:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \dot{x} &= v_0 \cos\theta \\ x &= v_0 \cos\theta t \end{aligned} \tag{9}$$

Nel momento in cui il corpo raggiunge la massima altezza, la componente y della velocità (v_y) è nulla:

$$v_y(t_M) = 0 \quad \rightarrow \quad -gt_M + v_0 \sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad t_M = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{10}$$

Per determinare x_M, è sufficiente utilizzare l'equazione (9), utilizzando come valore per il tempo proprio t_M:

$$x_M = v_0 \cos\theta t_M = v_0^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{2g} \tag{11}$$

La velocità alla massima altezza v_M è semplicemente uguale alla velocità iniziale lungo x (v_{0x}). Infatti, ci troviamo in un punto in cui $v_y = 0$, e lungo x il moto è rettilineo uniforme;

$$v_M = v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{12}$$

b) All'istante in cui il corpo (complessivo) arriva all'altezza massima, la molla si sgancia e le due masse si separano (istantaneamente). Si osserva che la massa 1 è ferma rispetto al suolo. Da queste informazioni è possibile calcolare il valore di k in funzione delle altre grandezze del problema (M, v_0, l_0, θ). Quando la molla viene sganciata, assumendo uno sgancio perfetto, questa tende a raggiungere la sua lunghezza di riposo, poichè era stata contratta fino a lunghezza nulla.
Tra prima e dopo lo sgancio si deve conservare l'energia (cinetica + potenziale gravitazionale + potenziale elastica):

$$\frac{1}{2}(2M)v_M^2 + \cancel{(2M)gy_M} + \frac{1}{2}kl_0^2 = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \cancel{2(Mgy_M)} \tag{13}$$

Notiamo che i contributi dovuti all'energia potenziale gravitazionale prima e dopo lo sgancio sono uguali: infatti, la rottura istantanea genera due contributi potenziali gravitazionali uguali tra di loro e singolarmente uguali alla metà dell'energia potenziale del corpo complessivo:

$$\underbrace{(2M)gy_M}_{\text{Massa iniziale}} = \underbrace{Mgy_M}_{\text{Massa 1}} + \underbrace{Mgy_M}_{\text{Massa 2}} \tag{14}$$

L'equazione (13) non è sufficiente da sola poichè contiene due incognite: v_x e k. La seconda equazione che ci permette di risolvere il problema è data dalla conservazione della quantità di moto lungo l'asse x, grazie all'assenza di forze che agiscono lungo tale asse:

$$(2M)v_M = Mv_x \quad \rightarrow \quad v_x = 2v_M \tag{15}$$

A destra è presente solo un contributo, poichè sappiamo che una delle due masse rimane ferma dopo lo sgancio. Sostituendo l'espressione (15) dentro l'equazione (13), otteniamo:

$$\cancel{\frac{1}{2}}(2M)Mv_M^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kl_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}M(2v_M)^2 \tag{16}$$

A questo punto, possiamo determinare k:

$$kl_0^2 = -2Mv_M^2 + 4Mv_M^2 = 2Mv_M^2 = 2Mv_0^2\cos^2\theta \quad \rightarrow \quad k = \frac{2Mv_0^2\cos^2\theta}{l_0^2} \tag{17}$$

c) Come già specificato in precedenza, una delle due masse rimane ferma rispetto al suolo dopo lo sgancio, e quindi l'ascissa corrispondente alla caduta di questa (x_1) coincide con l'ascissa del punto di massima altezza, punto in cui avviene la separazione delle due masse:

$$x_1 = x_M = v_0 \frac{\sin 2\theta}{2g} \tag{18}$$

La seconda massa impiegherà per cadere (sotto l'effetto della gravità) lo stesso tempo che ha impiegato per salire (dato che tale tempo non dipende dal valore delle masse), ossia t_M calcolato nel punto a). In questo tempo, dato che la massa si muove a velocità costante $v_x = 2v_M = 2v_0 \cos\theta$, percorrerà lungo x una distanza Δx pari a:

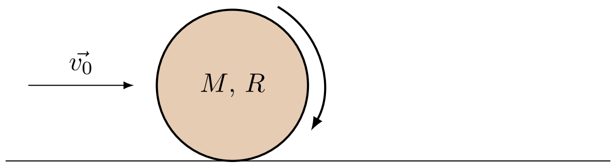
$$\Delta x = v_x t_M = 2v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} = 2v_0^2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g} \tag{19}$$

Per calcolare la coordinata x_2 di caduta è sufficiente sommare il valore Δx, al valore di massima altezza x_M (posizione dello sgancio):

$$x_2 = x_M + \Delta x = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{2g} + v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g} = v_0^2 \frac{3 \sin 2\theta}{2g} \tag{20}$$

Esercizio 3

Una sfera omogenea di massa M e raggio R viene lanciata sopra una superficie con coefficiente di attrito dinamico μ con una velocità iniziale $\vec{v_0}$ parallela alla superficie. Calcolare il tempo necessario alla sfera per iniziare a muoversi di puro rotolamento.



Soluzione

Sia x la posizione del centro di massa della sfera lungo l'asse x. Siamo interessati a determinare l'istante t^* in cui il moto diventa di puro rotolamento. Questa affermazione viene tradotta dalla seguente espressione:

$$\dot{x}(t^*) = \omega(t^*)R \tag{21}$$

dove ω è la velocità angolare della sfera. Per poterla applicare quindi, dobbiamo prima trovare le espressioni di $\dot{x}(t)$ e $\omega(t)$, e successivamente applicare l'equazione (21). Il risultato sarà un'equazione in cui l'unica incognita è il tempo t^*, che costituisce proprio l'istante in cui il puro rotolamento inizia.
L'unica forza agente lungo l'asse x è la forza di attrito, e quindi possiamo scrivere l'equazione del moto come segue:

$$M\ddot{x}(t) = -\mu M g \quad \rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -\mu g \tag{22}$$

Questa può essere facilmente integrata a dare:

$$\dot{x}(t) = v_0 - \mu g t \tag{23}$$

dove μ è adimensionale.
Per determinare la velocità angolare invece, utilizziamo la II equazione cardinale. In questo caso dobbiamo valutare tutti i momenti delle forze che agiscono rispetto al centro di massa. Dato che le uniche forze in gioco sono la forza peso e la forza di attrito, considerando come polo il centro di massa solo l'ultima farà momento, in quanto la forza peso rispetto a tale punto ha un braccio uguale a 0:

$$I_{CM}\dot{\omega}(t) = \mu M g R \tag{24}$$

dove μMgR costituisce il momento della forza di attrito rispetto al centro di massa. Inserendo l'espressione per il valore di I_{CM} (che per la sfera vale $2/5MR^2$) nell'equazione (24) otteniamo:

$$\frac{2}{5}MR^2\dot{\omega}(t) = \mu M g R \quad \rightarrow \quad \dot{\omega}(t) = \frac{5\mu g}{2R} \tag{25}$$

Questa equazione può essere integrata per trovare $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R}t \tag{26}$$

dove l'assenza del termine noto è dovuta ad una condizione iniziale, ossia che la velocità angolare è nulla all'istante iniziale ($\omega(0) = 0$). Questa espressione può essere combinata con quella precedentemente introdotta per $\dot{x}$ in modo da trovare il tempo t^*, applicando l'equazione (21):

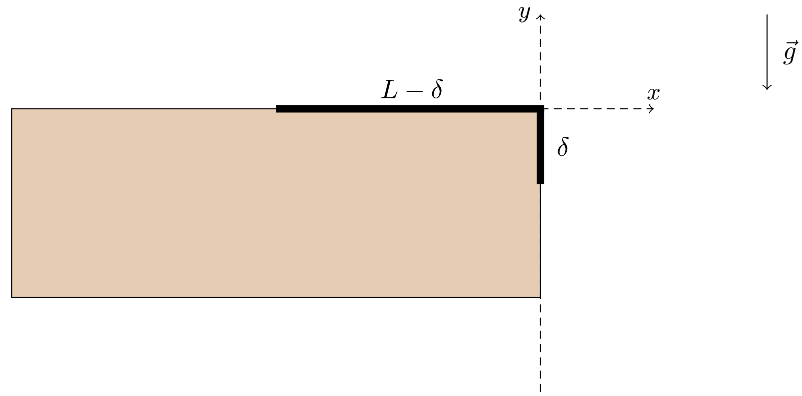
$$v_0 - \mu g t^* = R\left(\frac{5\mu g}{2R}t^*\right) \tag{27}$$

Risolvendo questa equazione possiamo trovare il risultato cercato (t^*):

$$v_0 - \mu g t^* = \frac{5\mu g}{2R}t^* \quad \rightarrow \quad t^* = \frac{2Rv_0}{7\mu g} \tag{28}$$

Esercizio 4

Un filo inestensibile di massa m, lunghezza L e densità lineare omogenea $\lambda = m/L$ è posizionato su di una sagoma di forma rettangolare liscia, pendendo all'istante iniziale di un tratto δ lungo la verticale, ed è inizialmente vincolato in questa posizione. Determinare l'equazione del moto del filo in esame una volta che tale vincolo viene rimosso.



Soluzione

Sia y la coordinata che definisce la punta del filo lungo il tratto in discesa, e quindi il suo movimento. L'energia cinetica $\mathcal{T}$ ha la consueta espressione:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{29}$$

Dato che l'origine degli assi è stata posta nell'angolo del tavolo dove il filo si piega, per calcolare l'energia potenziale bisogna considerare solamente il contributo dovuto alla parte di filo presente nel tratto verticale. Tale frazione di filo è quella che origina il contributo all'energia potenziale. Per il calcolo di questa sono necessari sia la massa che il valore della y ad ogni istante. Per quanto riguarda l'altezza, si considera la posizione del centro di massa nel tratto del filo che scende. Pertanto, se la punta del filo si trova ad un valore y, il centro di massa sarà a $y/2$. Per quanto riguarda la massa, è necessario considerare solo quella del tratto verticale. Quindi l'energia potenziale $\mathcal{U}$ vale:

$$\mathcal{U} = mgh = -\left(m\frac{y}{L}\right) g \left(\frac{y}{2}\right) \tag{30}$$

Possiamo ora scrivere l'energia totale $\mathcal{E}$ sommando i primi due contributi:

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\frac{mg}{L}y^2 \tag{31}$$

Sfruttando la conservazione dell'energia, deriviamo rispetto al tempo, possiamo trovare quindi l'equazione del moto da risolvere:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = m\dot{y}\ddot{y} - \frac{mg}{L}y\dot{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} - \frac{g}{L}y = 0 \tag{32}$$

In questa espressione si vede una forte somiglianza con l'equazione di un oscillatore armonico, più precisamente l'equazione del moto per il pendolo nell'ipotesi di piccole oscillazioni. La differenza è data dal segno del coefficiente di y, evidenza che rende $\sqrt{L/g}$ non più un periodo di oscillazione (a meno di un fattore 2π) ma una costante di tempo.

Per risolvere questa equazione differenziale omogenea del II ordine, cerchiamo una soluzione del tipo $y(t) = Ae^{\gamma t}$ (dove A e γ sono due coefficienti da determinare), ottenendo:

$$\gamma^2 Ae^{\gamma t} - \frac{g}{L}Ae^{\gamma t} = 0 \tag{33}$$

Semplificando:

$$\gamma^2 = \frac{g}{L} \quad \rightarrow \quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{34}$$

I due possibili valori di λ danno luogo a due possibili soluzioni. La loro combinazione lineare è la soluzione generale all'equazione differenziale:

$$y(t) = Ae^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} \tag{35}$$

Al fine di trovare A e B, sappiamo che $y(0) = \delta$, e che $\dot{y}(0) = 0$, ossia che il filo inizialmente pende di una lunghezza δ ed è fermo. Calcoliamo dunque la velocità:

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(Ae^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right) \tag{36}$$

Adesso possiamo applicare esplicitamente le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = \delta \\ \dot{y}(0) &= \sqrt{\frac{g}{L}}(A - B) = 0 \quad \rightarrow \quad A = B \end{aligned} \tag{37}$$

Dal sistema lineare segue che $A = B = \delta/2$, completando l'espressione (35):

$$y(t) = \frac{\delta}{2}e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + \frac{\delta}{2}e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} = \delta\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}}{2}\right) = \delta\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \tag{38}$$

dove abbiamo utilizzato la funzione coseno iperbolico:

$$\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}}{2} \tag{39}$$