

# 1. IL PROBLEMA DEI 2 CORPI

- 1.1 INTEGRALI PRIMI ED EQUAZIONI DEL MOTO .....
- 1.2 LE ORBITE E LA LORO CLASSIFICAZIONE .....
- 1.3 LEGGE ORARIA ED EQUAZIONE DI KEPLERO .....
- 1.4 INTEGRAZIONE NUMERICA DEL PROBLEMA DEI 2 CORPI .....

## 1.1 INTEGRALI PRIMI ED EQUAZIONI DEL MOTO

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}^3$ ; puntiformi; soggetti solo alla loro mutua interazione gravitazionale.

Il sistema è isolato ed ha 6 gradi di libertà (Fig. 1)

(1)  $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  vettore posizione relativa

(2)  $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  vettore del centro di massa  
 $m_1 + m_2 \equiv M$   
 massa totale

(3)  $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$  poiché il sistema è isolato (non ci sono forze esterne)

(4)  $M \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$  la quantità di moto lineare del sistema si conserva (i.e. 3 integrali primi del moto)

Se il CM non era inizialmente fermo posso passare al sistema di riferimento R2 (Fig 1) anch'esso inerziale come R1

Il riferimento R2 è centrato sul centro di massa del sistema:

$$(5) \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = - \frac{\vec{r}_2}{\vec{r}_1} \quad (6)$$

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = - \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (7)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Poiché il sistema è isolato (non c'è alcuna dissipazione), anche l'energia totale si conserva (1 integrale primo del moto)  
 E poiché non ci sono neppure momenti di forze esterne

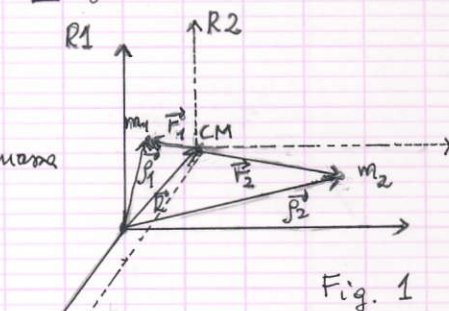


Fig. 1

R1: Sistema di riferimento inerziale + osservatore con "orologio" (strumento in grado di ripetere a intervalli regolari una data configurazione e quindi di misurare lo scorrere uniforme del tempo)

In R1 vale la legge d'inerzia: un corpo non soggetto a forze mantiene il proprio stato di moto (i.e. velocità costante - zero se era fermo)

non nulli, anche il momento angolare orbitale del sistema si deve conservare:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \vec{J} &\equiv m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = - \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}_1 + \frac{m_2 m_1}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}_2 = \\
 &\quad \uparrow \text{ per la (7)} \\
 &= \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1) = \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mathcal{K} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{massa ridotta del sistema} \quad \mathcal{K} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \vec{J} = \mathcal{K} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad \text{momento angolare orbitale totale}$$

$\vec{J}$  potrebbe variare solo in presenza di una forza che produca un momento non nullo. Siccome la forza gravitazionale, che è l'unica in gioco, è una forza centrale (diretta lungo la congiungente), il suo momento è nullo e quindi  $\dot{\vec{J}} = 0$  e  $\vec{J}$  si conserva ( $\vec{J} = \vec{M} \leftarrow$  momento di tutte le forze applicate)

Si ricordi che questa è una caratteristica di tutte le forze centrali, non solo di quella gravitazionale

Come si vede dalla (10),  $\vec{J}$  è uno pseudovettore (essendo il prodotto vettore di 2 vettori c'è l'ambiguità del segno - regola della mano destra o regola della mano sinistra ... noi usiamo quella della mano sinistra ...). Per questo  $\vec{J}$  fornisce 2 (e non 3) integrali primi del moto "buoni" (i.e. t.c. soddisfanno le proprietà stabilite dal teorema di Liouville - Arnold - Yost per poter contribuire alla integrabilità del problema)

In totale abbiamo 6 integrali primi "buoni":

$$\begin{array}{ll}
 3 & \text{quantità di moto lineare} \\
 1 & \text{energia} \\
 2 & \text{momento angolare orbitale} \\
 \hline
 6 &
 \end{array} \quad (11)$$

che risultano in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema e pertanto ne garantiscono l'integrabilità (appunto per il teorema di Liouville - Arnold - Yost)

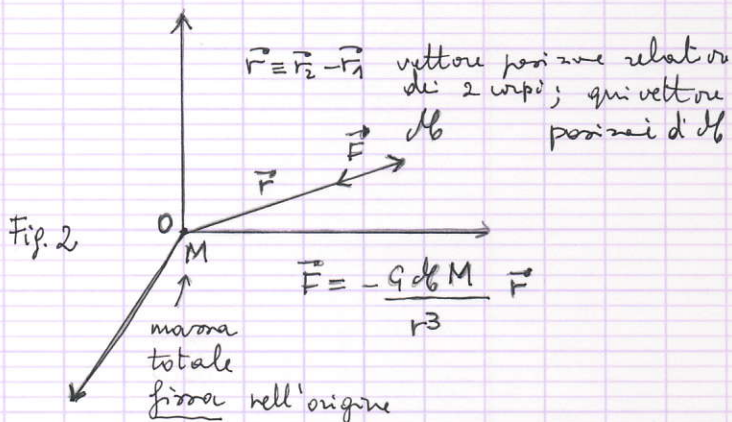
Si noti che basterebbe aggiungere un terzo corpo per passare a



Abbiamo ridotto le eq. di moto (12) dei 2 corpi a quelle (16) di un solo corpo **SENZA FARE ALCUNA APPROSSIMAZIONE** o caso particolare.

Le eq. (16) vengono interpretate, in semplicità di rappresentazione, come le eq. di moto del sistema descritto in Fig. 2:

un corpo di massa ridotta  $m$  soggetto all'attrazione gravitazionale di un corpo di massa  $M$  (per il che massa totale dei 2 corpi) fisso nell'origine



Nota: questo appena descritto non è il problema dei 2 corpi gravitazionale con massa  $m$  ed  $M$  perché se lo fosse la massa  $M$  non potrebbe essere fissa (essendo soggetta all'attrazione di  $m$ ), a meno che la massa  $m$  non sia t.c.  $m \ll M$  - es. Terra (uniforme (o a simmetria sferica) + satellite artificiale)

Attenzione: questo non significa che le eq. (16) esprimano il problema dei 2 corpi originali con qualche approssimazione! Non abbiamo fatto alcuna approssimazione nel passare dalle (12) alla (16); semplicemente, le (16) si può interpretare come l'eq. di moto del sistema descritto in Fig. 2 con la massa  $M$  fissa nell'origine.

In realtà è utile, per ragioni concettuali, riportare dalle eq. (12) per ciascuno dei 2 corpi e risolverle tenendo conto che in linea di principio per ogni corpo esistono 2 tipi di massa: massa inerziale e massa gravitazionale

- (17)  $m^i$  Massa inerziale. È l'inerzia che ogni corpo oppone all'azione di una forza, cioè, è il coefficiente di proporzionalità tra forza applicata (di qualunque tipo) e accelerazione acquisita dal corpo in risposta ad essa ( $\vec{F} = m^i \vec{a}$ )
- (18)  $m^g$  Massa gravitazionale. Esprime la capacità di un

corpo dotato di massa di attrarre gravitazionalmente un altro corpo. Si potrebbe chiamare più propriamente "carica gravitazionale" in analogia con la carica elettrica. E' quindi la massa che compare nella formula della forza di attrazione gravitazionale così come stabilita da Newton:

$$(19) \quad \vec{F} = - G \frac{m_1^g m_2^g}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r}: \text{vettore di posizione relativa})$$

Tenendo conto di questi 2 diversi tipi di massa, concettualmente ben diversi tra loro, le eq. (12) del moto dei 2 corpi si riscrivono come segue:

$$(20) \quad \begin{cases} m_1^i \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1^g m_2^g}{r^3} \vec{r} \\ m_2^i \ddot{\vec{r}}_2 = - \frac{G m_1^g m_2^g}{r^3} \vec{r} \end{cases}$$

Il "Principio di equivalenza" tra massa inerziale e massa gravitazionale stabilisce che per ogni corpo di qualsiasi massa e/o composizione vale:

$$(21) \quad \frac{m^i}{m^g} = +1$$

Da qui segue, ad esempio, per un corpo in caduta libera sulle superfici della Terra:

$$m^i g = \frac{G M_\oplus^g m^g}{R_\oplus^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{G M_\oplus^g}{R_\oplus^2} \quad (22)$$

cioè, l'accelerazione di cadute libere nel campo gravitazionale della Terra è la stessa per tutti i corpi

indipendentemente dalla loro massa e/o composizione. Infatti nelle (22), proprio avendo usato la (21), la massa del corpo in caduta non compare più! (Universalità della caduta libera)

Il "Principio" di equivalenza è in realtà una "ipotesi" che sta alla base sia della teoria della gravitazione di Newton che

della moderna teoria della Relatività Generale di Einstein. La sua verifica sperimentale richiede di verificare l'universalità della caduta libera; ad oggi risulta sperimentalmente verificato al livello di 1 parte su  $10^{13}$

Assumendo quindi il principio di equivalenza le (20) diventano:

$$(23) \quad \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_2}{r^3} \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G m_1}{r^3} \vec{r} \end{cases}$$

e sottraendo la prima dalla seconda otteniamo

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G \vec{r}}{r^3} (m_1 + m_2)$$

$$(24) \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{G M \vec{r}}{r^3} \quad (\text{la massa ridotta non compare} \dots)$$

che è identica alla (16) una volta che primo e secondo membro siano stati divisi per  $\vec{r}$ , che è possibile solo in quanto le (16) sono state ottenute dalle (12), che abbiamo scritto usando un solo tipo di masse per ciascun corpo. Il che significa avere tacitamente assunto la validità del principio di equivalenza

## 1.2 LE ORBITE E LA LORO CLASSIFICAZIONE

Ci proponiamo di scrivere l'equazione delle orbite soluzione della (24) con date condizioni iniziali. È naturale pensare che sia opportuno scrivere le eq. (24) che - ricordiamo - sono 2 sole equazioni nel piano dell'orbita, in coordinate polari prese

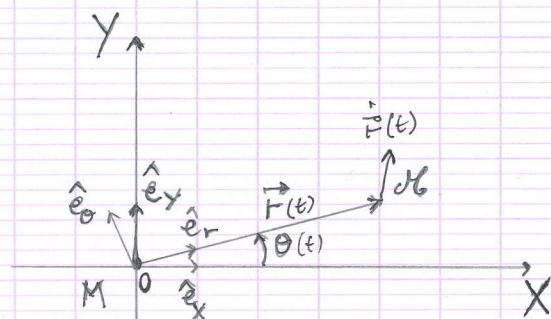


Fig. 3

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

La Fig. 3 mostra il sistema di riferimento mirzale, nel piano dell'orbita, dove valgono le eq. di moto (24) (o (16)) e dove la direzione dell'asse  $X$  è stata scelta verso una direzione "fissa" nel cielo (e.g. il punto  $\gamma$ , nodo ascendente dell'orbita della Terra attorno al Sole, che si muove molto lentamente a causa della precessione luni-Solare, peraltro ben nota e quindi tale da poter essere tenuta in conto - vedi capitolo apposito). Pertanto, il sistema mirzale di Fig. 3 non è legato al particolare problema dei 2-corpi che stiamo studiando (con date condizioni iniziali); l'angolo  $\theta$  misurato in senso antiorario a partire dall'asse  $X$  di tale sistema definito come sopra si indica come longitudine del corpo.

In coordinate cartesiane  $X, Y$  i versori degli assi coordinati sono  $\hat{e}_X, \hat{e}_Y$  (ved Fig. 3), sono ovviamente fissi nel tempo, e le eq. di moto sono:

$$(25) \quad \begin{cases} \ddot{X} = - \frac{GM}{r^3} X \\ \ddot{Y} = - \frac{GM}{r^3} Y \end{cases}$$

Se passiamo a coordinate polari piane  $r, \theta$  i versori degli assi coordinati sono  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  (ved Fig. 3) che evidentemente variano nel tempo. In tale sistema di coordinate non vale la legge fondamentale della dinamica  $\vec{F} = m\vec{a}$ , dato che si tratta di un sistema non inerziale, e la  $\vec{F} = m\vec{a}$  vale solo in un sistema inerziale. Conviene quindi partire dalle eq. di moto in forma vettoriale (le (24)) ed esprimere il vettore  $\vec{F}$  e la sua derivata seconda rispetto al tempo  $\ddot{\vec{F}}$  in coordinate polari piane  $r, \theta$  anziché nelle coordinate cartesiane  $X, Y$ . Abbiamo:

$$(26) \quad \vec{F} = r \hat{e}_r$$

con

$$(27) \quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

$$(28) \hat{e}_r = \cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y \equiv (\cos\theta, \sin\theta)$$

E quindi:

$$(29) \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r$$

dove (dalla (28)):

$$\dot{\hat{e}}_r = -\dot{\theta} \sin\theta \hat{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta \hat{e}_y \equiv \dot{\theta} (-\sin\theta, \cos\theta)$$

con (vedi Fig. 3):

$$(30) \hat{e}_\theta = -\sin\theta \hat{e}_x + \cos\theta \hat{e}_y \equiv (-\sin\theta, \cos\theta)$$

cioè:

$$(31) \dot{\hat{e}}_\theta = \dot{\theta} \hat{e}_r$$

con la quale il vettore velocità  $\dot{\vec{r}}$  in coordinate polari viene diventa:

$$(32) \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

Nelle eq. di moto (24) compare il vettore accelerazione  $\ddot{\vec{r}}$  e quindi dobbiamo derivare la (32) ancora una volta rispetto al tempo:

$$(33) \ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\hat{e}}_\theta$$

con (dalla (30)):

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos\theta \hat{e}_x - \dot{\theta} \sin\theta \hat{e}_y \equiv -\dot{\theta} (\cos\theta, \sin\theta)$$

cioè:

$$(34) \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

Usando la (31) e la (34), la (33) diventa:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r$$

e, raggruppando le 2 componenti lungo  $\hat{e}_r$  ed  $\hat{e}_\theta$ :

$$(35) \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Usando la (26) e la (35) possiamo ora scrivere le eq. di moto (24) in coordinate polari piane, cioè nelle 2 direzioni  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  invece che  $\hat{e}_x, \hat{e}_y$  (come nelle (25)). Otteniamo:

$$(36) \quad (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta = -\frac{GM}{r^2}\hat{e}_r$$

e quindi, componente per componente:

$$(37) \quad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

la seconda delle (37) è equivalente a:

$$(38) \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow (\text{poiché } r > 0) \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

e quindi si dice che

$$(39) \quad r^2\dot{\theta} = \text{costante del moto}$$

Questa grandezza ha le dimensioni di un momento angolare per unità di massa. Riprendiamo quindi l'integrale del momento angolare orbitale del sistema  $\vec{J}$  come dalla (10) e scriviamolo per unità della massa ridotta del sistema come

$$(40) \quad \vec{J} \equiv \frac{\vec{J}}{M} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Si tratta ora seppiamo di un integrale primo del moto (poiché la forza di attrazione gravitazionale è una forza centrale) ed è un vettore perpendicolare al piano orbitale (il piano di Fig. 3)

il cui modulo (usando la (39)) risulta essere:

$$(40') \quad \vec{J} = r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta) = r \hat{e}_r \times r \dot{\theta} \hat{e}_\theta = r^2 \dot{\theta} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = r^2 \dot{\theta} \hat{e}_z$$

cioè

$$(41) \quad J = r^2 \dot{\theta}$$

$$(42) \quad \hat{e}_z = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_x \times \hat{e}_y$$

↑  
vettore dell'asse Z,  
asse  $\perp$  al piano  
orbitale di Fig. 3

che ovviamente deve essere costante (trattandosi di un vettore integrale del moto) e che abbiamo semplicemente ri-obtenuto con la (39) scrivendo le eq. del moto in coordinate polari piane. È evidente che la (42) lega univocamente - per ogni dato problema dei 2-corpi - le grandezze  $\dot{\theta}$  ed  $r^2$ , e quindi ci permette di eliminare  $\dot{\theta}$  dalla prima delle 2 eq. di moto (37), che diventa:

$$(43) \quad \ddot{r} = \frac{J^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

Abbiamo quindi ridotto il problema ad una sola equazione di moto nella variabile scalare  $r > 0$ , essendo partiti dalle 6 eq. di moto (12).

A questo punto dobbiamo trovare l'eq. dell'orbita che soddisfa l'eq. di moto (43). Un modo molto elegante per ottenerla è quello di introdurre il vettore di Lenz  $\vec{e}$ . Il vettore di Lenz è definito come:

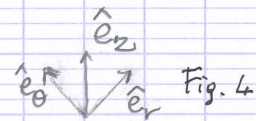
$$(44) \quad \vec{e} = \frac{1}{GM} \dot{\vec{r}} \times \vec{J} - \hat{e}_r$$

giace nel piano del moto e

Si tratta di un vettore edimensionale (verificare...) che ha l'importante proprietà di essere un integrale del moto, cioè una grandezza costante nel tempo per un dato problema dei 2-corpi con date condizioni iniziali. Come

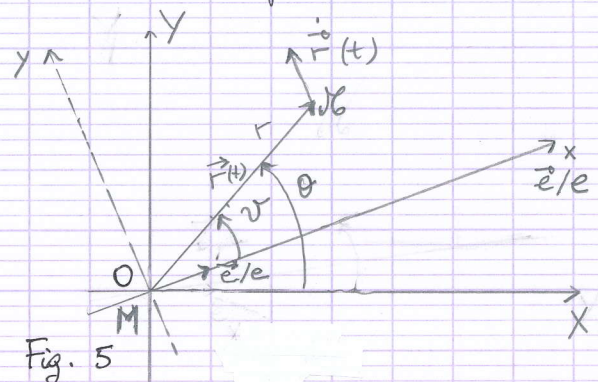
vedremo si tratta di un integrale non indipendente da quelli già trovati (in particolare il momento angolare orbitale e l'energia), ma che tuttavia ha un ruolo molto importante. Dimostriamo quindi prima di tutto che si tratta di un integrale del moto. Dobbiamo dimostrare che  $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$ . Dalle definizioni (44):

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \dot{\vec{e}} &= \frac{1}{GM} \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} - \dot{\hat{e}}_r = -\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{r} - \dot{\theta} \hat{e}_\theta = \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{uso l'eq. del moto (24)} \\
 &\quad \text{(e la (31) per } \dot{\hat{e}}_r) \\
 &= -\frac{1}{r^2} \hat{e}_r \times (r^2 \dot{\theta} \hat{e}_\theta) - \dot{\theta} \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \underbrace{\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta}_{= -\hat{e}_\theta} - \dot{\theta} \hat{e}_\theta = \vec{0} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{dalla (40')}
 \end{aligned}$$



Poiché  $\vec{e}$  è un vettore che giace nel piano del moto, ed è una costante del moto, ne segue che per ogni dato problema dei 2 corpi con date condizioni iniziali esiste una direzione fissa nel piano del moto tipica di quel dato sistema fisico. In attesa di definire il significato fisico/geometrico, possiamo senz'altro fare la scelta di scegliere questa direzione fissa nel piano del moto come asse coordinato orizzontale, invece dell'asse  $X$  di Fig. 3 che, come abbiamo visto, non ha alcuna relazione con il problema dei 2-corpi che stiamo studiando (la differenza del vettore di Lenz!).

Avremo quindi una situazione come in Fig. 5 in cui il nuovo asse orizzontale  $x$  coincide con il vettore di Lenz  $\vec{e}$ . Nel nuovo sistema  $Oxy$



il vettore

$\vec{r}^{(4)}$

La posizione istantanea  $\vec{r}$  della massa ridotta  $\mu$  viene espressa in coordinate polari da  $r, \vartheta$  dove  $\vartheta$  è l'angolo misurato in senso antiorario a partire dal vettore di Lenz (i.e. dell'asse  $x$ ). Questo angolo si chiama in meccanica celeste anomalia vera (anomaly perché si misura a partire dal vettore di Lenz e vera perché dà la posizione istantanea vera del corpo sull'orbita rispetto alla massa totale  $(M)$  <sup>nel</sup> fuoco dell'orbita).

Poiché il vettore di Lenz è fisso nel piano, ne deriva che

$$\vartheta - \vartheta_0 = \text{costante}$$

e quindi:

$$(4.6) \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0$$

che abbiamo scritto

così che in tutte le formule in cui compariva il momento angolare orbitale, e quindi  $\vartheta$ , possiamo usare indifferentemente  $\dot{\vartheta}$ . (La velocità angolare istantanea è la derivata temporale della longitudine  $\vartheta_0^{(4)}$  dell'anomalia vera  $\vartheta^{(4)}$ , poiché ad ogni istante nel corso del moto questi 2 angoli differiscono per un angolo fisso, caratteristico del problema dei 2-corpi dato).

Nota: Il momento angolare  $\vec{J}$  è un integrale del moto in qualunque problema caratterizzato da una forza centrale, indipendentemente dalla sua dipendenza dalla distanza. Invece il vettore di Lenz è un integrale del moto soltanto nel caso in cui la forza centrale dipenda dall'inverso del quadrato della distanza mutua ( $F \propto 1/r^2$ ), come appunto nel caso della forza di attrazione gravitazionale (come si vede dalle (4.5), per dimostrare che  $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$  usiamo l'eq. del moto e la variabile  $r$  scompare solo perché  $F \propto 1/r^2$ ).

Per scrivere l'eq. dell'orbita che soddisfa l'eq. del moto (4.3) dobbiamo trovare una relazione nel piano  $x, y$  di Fig. 5 tra

le variabili  $r$  e  $v$ , <sup>che</sup>  $v$  ~~non~~ sono legati da una relazione che fornisce l'equazione dell'orbita. Possiamo ottenerla dal prodotto scalare  $\vec{e} \cdot \hat{e}_r$ :

$$(47) \quad \vec{e} \cdot \hat{e}_r = e \cos v$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \left( \frac{1}{GM} \dot{\vec{r}} \times \vec{j} - \hat{e}_r \right) \cdot \hat{e}_r = \frac{1}{GM} \hat{e}_r \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{j}) - 1 = \frac{1}{GM} \vec{j} \cdot (\hat{e}_r \times \dot{\vec{r}}) - 1 = \\ & = \frac{1}{GM} r^2 \dot{\hat{e}}_z \cdot (\hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{v} \hat{e}_\theta)) - 1 = \frac{1}{GM} r^2 \dot{v} \hat{e}_z \cdot \underbrace{(\dot{r} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta)}_{\hat{e}_z} - 1 = \\ & \uparrow \vec{j} = r^2 \dot{v} \hat{e}_z \\ & = \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z - 1 = \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM} - 1 = \frac{1}{GM} \frac{j^2}{r} - 1 \\ & \quad \quad \quad \uparrow \dot{v} = j/r^2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$e \cos v = \frac{j^2}{GM} \frac{1}{r} - 1$$

che scriviamo nella forma

$$(48) \quad r(t) = \frac{j^2/GM}{1 + e \cos v(t)}$$

dove  $j^2/GM > 0$  ed  $e > 0$  sono costanti del moto.

La (47) è l'eq. dell'orbita soluzione delle eq. del moto (24) scritta in coordinate polari piane  $r, v$  e cioè distanze relative della massa ridotta rispetto alla massa totale posta nell'origine (i.e. anche distanza relativa ha le due masse  $m_1, m_2$ ) e anomalia vera (i.e. l'asse orizzontale nel piano del moto è diretto lungo il vettore di Lenz, come indicato in Fig. 5).

La (48) è l'eq. di una conica in coordinate polari.

La grandezza  $j^2/GM > 0$  è una lunghezza e viene storicamente indicata come  $p \equiv$  semilato retto della conica dato che rappresenta la distanza della massa ridotta dalla massa totale posta nell'origine quando  $v = \pi/2$ , cioè ad angolo retto rispetto al vettore di Lenz (con  $x$ ).

L'eq. dell'orbita (48) si scrive quindi anche come

$$(49) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$(50) \quad p \equiv \frac{j^2}{GM} > 0$$

La (49) in coordinate cartesiane diventa

$$r + e r \cos v = p$$

$$r \cos v = x$$

$$r = p - ex$$

$$(51) \quad x^2 + y^2 = (p - ex)^2$$

che è chiaramente l'eq. di una conica nel piano  $(x, y)$ .

L'asse di simmetria è l'asse  $x$  (che coincide col vettore di Lenz) e l'origine degli assi è fuori centro lungo l'asse  $x$  (la variabile  $x$  compare alla prima potenza oltre che al quadrato).

La dimensione della conica lungo l'asse di simmetria che definiamo  $2a$  risulta essere (usando la (49)):

$$2a \equiv r(v=0) + r(v=\pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$\Downarrow$

$$(52) \quad p = a(1-e^2)$$

dove la grandezza  $a$  è il semiasse maggiore della conica e il modulo del vettore di Lenz e la sua eccentricità.

Usando la (50) e la (52) otteniamo:

$$(53) \quad j^2 = GMa(1-e^2)$$

che esprime il modulo del momento angolare orbitale (per unità di massa) in funzione delle caratteristiche geometriche dell'orbita: semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $e$ . (si noti che  $j$  dipende da entrambi).

