CAPITOLO I

DIFFICOLTA' DELLA FORMULAZIONE NEWTONIANA

1. Reazioni vincolari

In questo capitolo ci proponiamo di illustrare le ragioni per studiare una formulazione della Meccanica (Meccanica analitica) diversa dalla formulazione newtoniana. A prima vista, infatti, la Meccanica analitica corre il rischio di sembrare un puro esercizio formale che nulla aggiunge alla meccanica newtoniana. Vediamo dunque quali sono le difficoltà della formulazione newtoniana che ci si propone di risolvere con la formulazione lagrangiana (Meccanica analitica).

Un problema meccanico (per comodità ci riferiamo ad un punto materiale) è concettualmente risolto quando si scrivono le equazioni di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

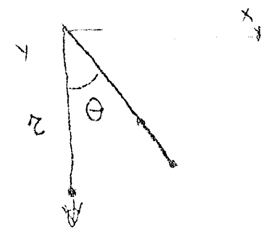
In pratica le equazioni (1) sono spesso lontane dal fornirci una soluzione immediata del problema. E' vero che da un punto di vista matematico la soluzione della (1) si riduce ad un problema di integrazioni ma per questo è necessario che le forze $\vec{F}$ siano note. Questo non è quasi mai il caso per il moto di un punto vincolato. L'equazione (1.1) assume infatti la forma seguente

$$\vec{R} + \vec{f} = m\vec{a} \tag{1.1'}$$

dove $\vec{f}$ è la risultante delle forze non vincolari, in genere note (es. forze di gravità, forze elastiche etc.) ed $\vec{R}$ è la risultante delle reazioni vincolari che non è in genere nota, dato che le reazioni vincolari dipendono e condizionano il moto del punto. I vincoli, infatti, esplicano proprio quelle reazioni necessarie per mantenere vincolato il moto del corpo, e ad ogni istante la reazione vincolare necessaria per questo, dipende dalle accelerazioni del punto soggetto ai vincoli[1].

[1] In questa trattazione ci occuperemo solo di una particolare classe di vincoli (vincoli olonomi) che saranno discussi volta per volta.

Esempio 1. Come esempio del fatto che la reazione vincolare dipende dal moto del punto vediamo come varia la reazione nel pendolo.



Le equazioni di Newton sono:

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\ddot{\vec{x}} \qquad (1.2)$$

In questo, come in quasi tutti i problemi in cui intervengono i vincoli, le reazioni vincolari non sono note. Esse possono essere determinate dopo che si conosce il moto (cioè l' $\ddot{\vec{x}}$). Il metodo che si segue in genere è quello di trovare la soluzione del moto mediante l'uso di integrali primi, come conservazione della energia etc. e poi ricavare $\vec{R}$ dalla (1.2). Nel nostro caso l'integrale dell'energia dà (le forze vincolari non fanno lavoro!)

$$mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

(avendo usato coordinate polari: $x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta$).
Pertanto si ha

$$r\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$$

D'altra parte proiettando la (1.2) lungo la normale esterna alla traiettoria si ha

$$-R + mg\cos\theta = -mr\dot{\theta}^2$$

cioè

$$R = m(g\cos\theta + r\dot{\theta}^2) = mg(2-\cos\theta)$$

Come abbiamo visto anche nell'esempio precedente, le equazioni di Newton (1.1') non forniscono immediatamente le soluzioni di problemi in cui sono presenti reazioni vincolari. La eliminazione delle reazioni vincolari costituisce infatti un passo necessario per risolvere il moto di sistemi vincolati. Le vie che si possono seguire a questo scopo sono essenzialmente due:

a) Si creano le costanti del moto (o integrali primi) che caratterizzano il sistema in esame (conservazione dell'energia, del momento angolare, etc...) in modo da ottenere le soluzioni del problema per una via che non fa uso delle equazioni (1.1').
Le reazioni vincolari vengono poi determinate usando le (1.1') una volta nota l'accelerazione $\vec{a}$. E' questo il metodo che abbiamo usato nell'esempio 1.

b) Si cerca di eliminare direttamente $\vec{R}$ combinando le equazioni (1.1'). Tale metodo verrà discusso nel problema 1. Vediamolo ora anche nel caso del pendolo.

Esempio 1'. Vediamo di studiare il problema dell'esempio 1 usando il metodo b). Le equazioni 1.2) sono le seguenti:

$$m\ddot{x} = -R\sin\theta\,, \qquad m\ddot{y} = -R\cos\theta + mg \qquad (1.3)$$

Moltiplicando la prima per $\cos\theta$ e la seconda per $(-\sin\theta)$ e sommando si ottiene

$$m(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = -mg\sin\theta$$

Sostituendo a $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ la loro equazione nei termini di θ

$$\ddot{x} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$
$$\ddot{y} = -r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

Si ottiene poi

$$r\ddot{\theta} = -g\sin\theta \qquad (1.4)$$

che è l'equazione del pendolo e non contiene più forze incognite. Pertanto, le equazioni del moto (1.3) si sono ridotte ad una. L'integrale $\theta(t)$ di tale equazione determina completamente la posizione del punto materiale istante per istante, cioè è sufficiente assegnare istante per istante un solo numero $\theta(t)$. Ciò è dovuto al fatto che la traiettoria è prestabilita essendo imposta dal vincolo. Il punto materiale deve infatti rimanere sempre a distanza fissa dal punto di sospensione. Ciò si esprime geometricamente con la condizione

$$(x_p(t) - x_0(t))^2 + (y_p(t) - y_0(t))^2 = r^2$$

Una condizione di questo tipo si dice vincolo olonomo. Torneremo nel seguito su tale argomento.
Come è facile convincersi, l'equazione (1.4) è la proiezione delle (1.2) lungo la tangente alla traiettoria (che è il metodo standard per studiare il moto del pendolo). In modo analogo, prendendo una opportuna combinazione delle (1.3) si ottiene la proiezione della (1.2) lungo la normale alla traiettoria.

2. Forze apparenti e sistemi non inerziali

Un'altra complicazione newtoniana si presenta quando per descrivere il sistema in esame ci si mette in un sistema non inerziale. Ciò è spesso reso necessario per una caratterizzazione più intrinseca del moto del sistema in esame (si veda ad esempio il problema 1).
L'uso di coordinate relative ad un sistema non inerziale (brevemente coordinate non inerziali) porta alla necessità di introdurre le cosidette forze apparenti $\vec{f}_a$. Le equazioni di Newton diventano allora

$$\vec{R} + \vec{f} + \vec{f}_a = m\vec{a}$$

Le forze apparenti possono essere funzioni non note. Ad esempio la forza di Coriolis $2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ dipende dalla velocità $\vec{v}$ del punto rispetto al sistema non inerziale e pertanto dipende dal moto del punto stesso.
Come esempio delle complicazioni dovute alle reazioni vincolari ed alle forze apparenti che intervengono nella formulazione newtoniana consideriamo il seguente problema

Problema 1

Un punto materiale P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio r in un piano verticale. Scridal vincolo. Il punto materiale deve infatti rimanere sempre a distanza fissa dal punto di sospensione. Ciò si esprime geometricamente con la condizione

$$(x_P(t) - x_0(t))^2 + (y_P(t) - y_0(t))^2 = r^2$$

Una condizione di questo tipo si dice vincolo olonomo. Torneremo nel seguito su tale argomento.
Come è facile convincersi, l'equazione (1.4) è la proiezione delle (1.2) lungo la tangente alla traiettoria (che è il metodo standard per studiare il moto del pendolo). In modo analogo, prendendo una opportuna combinazione delle (1.3) si ottiene la proiezione della (1.2) lungo la normale alla traiettoria.

2. Forze apparenti e sistemi non inerziali

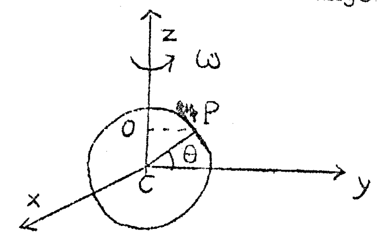
Un'altra complicazione newtoniana si presenta quando per descrivere il sistema in esame ci si mette in un sistema non inerziale. Ciò è spesso reso necessario per una caratterizzazione più intrinseca del moto del sistema in esame (si veda ad esempio il problema 1).
L'uso di coordinate relative ad un sistema non inerziale (brevemente coordinate non inerziali) porta alla necessità di introdurre le cosidette forze apparenti $\vec{f}_a$. Le equazioni di Newton diventano allora

$$\vec{R} + \vec{f} + \vec{f}_a = m\vec{a}$$

Le forze apparenti possono essere funzioni non note. Ad esempio la forza di Coriolis $2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ dipende dalla velocità $\vec{v}$ del punto rispetto al sistema non inerziale e pertanto dipende dal moto del punto stesso.
Come esempio delle complicazioni dovute alle reazioni vincolari ed alle forze apparenti che intervengono nella formulazione newtoniana consideriamo il seguente problema

Problema 1

Un punto materiale P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio r in un piano verticale. Scrivere l'equazione del moto di P nel caso in cui il disco ruoti rispetto al diametro verticale con velocità angolare costante ω.



Soluzione:

mettiamoci sul riferimento solidale al cerchio (non inerziale). La descrizione del moto di P in un sistema inerziale farebbe perdere di vista le caratteristiche essenziali del moto stesso e ne renderebbe più difficile la visualizzazione. Le equazioni di Newton in forma vettoriale ed in coordinate cartesiane sono:

$$\vec{F} = -mg\hat{z} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + m\omega^2\vec{OP} + 2m\vec{v}_P \wedge \vec{\omega}$$ ([illegible])

($\vec{R}_1$ = reazione radiale, $\vec{R}_2$ = reazione normale al piano del cerchio).

Proiettando $\vec{F}$ lungo gli assi avremo:

$$F_x = R_2 - 2v\omega\sin\theta = m\ddot{x}$$

$$F_y = -R_1\cos\theta + m\omega^2 r\cos\theta = m\ddot{y}$$

$$F_z = -mg - R_1 \overset{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} = m\ddot{z}$$

Osservando questo sistema ci accorgiamo che

1) Le reazioni vincolari $\vec{R}_1$ ed $\vec{R}_2$ non sono note
2) Nelle equazioni scritte compaiono le forze apparenti. Fra esse compare quella di Coriolis che dipende dalle velocità v_P (velocità del punto materiale P nel sistema solidale al cerchio) e quindi non nota a priori.

Un modo per superare queste difficoltà è quello di procedere gradatamente alla eliminazione di tutte le quantità non note per ridurci ad un sistema di equazioni che permettono di determinare facilmente il moto di P.

Per prima cosa cominciamo con l'eliminazione delle reazioni vincolari. Da come abbiamo scelto il sistema di assi solidali al cerchio, l'asse x è perpendicolare al cerchio e quindi essendo il punto vincolato a muoversi sul cerchio si avrà $\ddot{x} = 0$. Quindi ci si riduce ad un sistema di due sole equazioni in quanto

$$m\ddot{x} = 0 = R_2 - 2v\omega \sin\theta \Rightarrow R_2 = 2v\omega\sin\theta$$

$$m\ddot{y} = -R_1\cos\theta + m\omega^2 r\cos\theta$$

$$m\ddot{z} = -mg - R_1\sin\theta$$

A questo punto possiamo eliminare la reazione vincolare R_1 moltiplicando per $\cos\theta$ la prima equazione e per $\sin\theta$ la seconda e sommando

$$\begin{cases} m\ddot{z}\cos\theta = -mg\cos\theta - R_1\sin\theta\cos\theta \\ m\ddot{y}\sin\theta = (-R_1\cos\theta + m\omega^2 r\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$m(\ddot{z}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = -mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta$$

$$\ddot{z}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta = -g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta\cos\theta$$

Ora passando da coordinate cartesiane a coordinate polari (coordinate generalizzate) avremo:

$$z = r\sin\theta, \quad y = r\cos\theta$$

$$\ddot{z} = -r\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + r\cos\theta\,\ddot{\theta}, \quad \ddot{y} = -r\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - r\sin\theta\,\ddot{\theta}$$

Sostituendo queste nuove coordinate nell'ultima equazione avremo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\cos\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

Vediamo ora di commentare il risultato. La formulazione newtoniana del problema, usando le coordinate cartesiane x, y, z del punto P, fa intervenire un numero sovrabbondante di coordinate, non tutte indipendenti. Conseguenza dell'introduzione di coordinate non essenziali o sovrabbondanti è la comparsa delle reazioni vincolari, non note a priori. La soluzione del problema è stata ottenuta riducendo le equazioni ad una sola, che determina la dipendenza temporale della sola "coordinata" necessaria per individuare la configurazione o posizione del punto P.

Come vedremo nel seguito compito della Meccanica Analitica è quello di fare intervenire fin dall'inizio solo il numero di coordinate (lagrangiane) strettamente necessarie per individuare la configurazione del sistema e di scrivere solo il numero di equazioni relative a tali coordinate.

3. Scelta delle coordinate

Dagli esmepi precedenti è apparso chiaro che la formulazione newtoniana non offre il metodo più diretto per studiare il moto di un sistema vincolato. La presenza dei vincoli rende sovrabbondanti le coordinate cartesiane e la descrizione del moto porta ad innumerevoli complicazioni quali ad esempio l'apparire di forze non note (le reazioni vincolari). La loro eliminazione è infatti equivalente alla riduzione del numero di coordinate. D'altra parte le proprietà di simmetria del sistema e le sue caratteristiche spesso suggeriscono di usare coordinate non cartesiane (ad es. polari) per descrivere il moto, o addirittura di mettersi in un sistema di riferimento non inerziale che sia più intrinseco al problema da trattare. In entrambi i casi le equazioni di Newton non sono utilizzabili direttamente. Nel primo caso siccome le equazioni di Newton non sono invarianti per cambiamenti di coordinate, occorre fare il cambiamento di coordinate direttamente nella (1.1) e (1.1') per trovare come si trasformano le equazioni di Newton. (Si veda ad esempio il problema 1). Nel secondo caso l'uso di coordinate più intrinseche al problema porta all'introduzione delle forze apparenti. E' naturale porsi le seguenti domande:

1) E' possibile trovare una formulazione della meccanica in cui la forma delle equazioni sia invariante per trasformazioni di coordinate?
2) E' possibile fin dall'inizio (senza conti laboriosi) scrivere le equazioni del moto in termini delle sole coordinate necessarie per individuare il moto del sistema senza dover passare attraverso l'uso di coordinate sovrabbondanti con le conseguenti introduzioni di reazioni vincolari?
3) E' possibile trovare una formulazione delle equazioni della

meccanica che non faccia distinzione tra sistemi inerziali e non?

Come vedremo nel prossimo capitolo, la Meccanica Analitica riesce a dare una risposta positiva alle domande precedenti.

CAPITOLO II

EQUAZIONI DI LAGRANGE

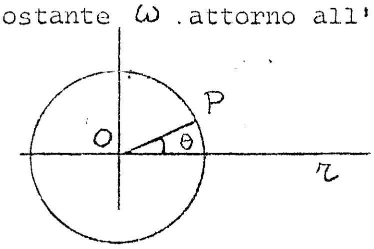
1. Gradi di libertà e coordinate lagrangiane

Supponiamo di avere un sistema meccanico la cui configurazione o posizione è completamente descritta dalle coordinate di N punti: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$. Per esempio la configurazione di un sistema rigido è completamente individuata dalle coordinate di 3 suoi punti non collineari. (6 gradi di libertà)
Le coordinate $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N$ stanno ad indicare $3N$ quantità x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ..... Per comodità d'ora innanzi useremo la notazione x_i, $i = 1 \ldots . 3N$ per indicare tali $3N$ quantità. In genere, per la presenza di vincoli, non tutte le coordinate x_i saranno indipendenti. Siano $q_1 \ldots . q_n$ il numero minimo di "coordinate" (in genere non cartesiane) necessarie per individuare le configurazioni del sistema in presenza dei vincoli. Se n sono tali coordinate, n è il numero di gradi di libertà del sistema in esame e $q_1 \ldots\ldots q_n$ sono dette coordinate generalizzate o lagrangiane. Siccome le $q_1 \ldots\ldots q_n$ ad un certo istante t determinano completamente la configurazione del sistema, all'istante t, esse determineranno a maggior ragione le coordinate x_i all'istante t; cioè le x_i ad ogni istante saranno esprimibili come funzioni delle q

$$x_i = x_i(q, t) \tag{2.1}$$

La dipendenza esplicita dal tempo sta ad indicare che la relazione tra le x e le q può dipendere dal tempo.

Esempio 2. Un punto P si muove su una circonferenza che ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse passante per il centro.



Siano x, y le coordinate cartesiane di P rispetto ad un sistema inerziale $\mathcal{R}$ e θ l'angolo che il raggio OP forma con l'asse fisso Ox solidale ad $\mathcal{R}$. E' chiaro che in questo caso il numero di gradi di libertà è uno e che θ è una coordinata lagrangiana possibile. La relazione tra le coordinate x, y e la coordinata lagrangiana θ dipende esplicitamente dal tempo ed è

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \omega t) \\ y &= r \sin(\theta + \omega t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

La (2.2) è un caso particolare dell'espressione generale (2.1). E' chiara infatti la dipendenza di x_i da q (che in questo caso è θ) e dal tempo.

Esempio 3. Consideriamo il sistema descritto nel problema 1. Sia $\mathcal{R}'$ un sistema di assi x', y', z' fisso (sistema inerziale) e $\mathcal{R}$ un sistema di assi x, y, z solidale al cerchio, tali che l'asse x è perpendicolare al cerchio. Siccome il moto di rotazione rispetto all'asse z è fissato la variazione nel tempo della variabile angolare φ' rispetto al riferimento $\mathcal{R}'$ è nota $\varphi' = \omega t + \varphi_0$. D'altra parte il punto è vincolato a muoversi sul cerchio pertanto deve essere sempre

$$x_P'^2 + y_P'^2 + z_P'^2 = r^2 = \text{raggio del cerchio.}$$

I gradi di libertà si riducono pertanto a 1 solo. Come coordinata lagrangiana si può scegliere l'angolo θ che il raggio CP forma con l'asse y del riferimento $\mathcal{R}$ solidale al cerchio. Da notare che se la rotazione attorno all'asse z non fosse fissata i gradi di libertà sarebbero 2: oltre all'angolo θ bisognerebbe dare anche l'angolo φ' formato dal piano zy di $\mathcal{R}$ rispetto all'asse x' di $\mathcal{R}'$. Il legame tra le coordinate x', y', z' e θ dipende dal tempo

$$\begin{aligned} x' &= r\, \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\theta \cos\omega t \\ y' &= r\, \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\theta \sin\omega t \\ z' &= r\, \overset{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} \end{aligned}$$

E' chiaro che le (2.1) sono invertibili

$$q_j = q_j\,(x,t)$$

Infatti le x_i individuano completamente le configurazioni del sistema e quindi devono individuare anche le coordinate q_j : cioè le q_j devono potersi esprimere come funzioni delle x :
Prima di concludere conviene dare la definizione di derivata totale di una funzione: sia data una funzione $x_i = x_i(q,t) = x_i[q(t),t]$, essa dipende da t sia esplicitamente sia tramite le $q(t)$. La derivata totale di queste funzioni dà la variazione "totale" di tale funzione rispetto al tempo sia esplicitamente che tramite le $q(t)$

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (2.3)$$

Il primo termine tiene conto appunto della dipendenza di x_i dal tempo tramite le q , mentre il secondo termine tiene conto della dipendenza esplicita di x_i dal tempo.
Per maggiore semplicità sono state trascurate le espressioni di sommatoria, ma è comunemente inteso che quando due indici vengono ripetuti sia sottintesa la sommatoria. Nel seguito ci occorrerà di usare diverse volte le quantità $\partial\dot{x}_i/\partial\dot{q}_m$.
Analizzando le (2.3) si nota immediatamente che soltanto il primo dei due termini del membro di destra dipende dalle $\dot{q}$ dato che $\dfrac{\partial x_i(q,t)}{\partial q_j}$ è una funzione delle q e del tempo e non dipende dalle $\dot{q}$. Quindi avremo:

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \qquad (2.4)$$

(Identità) la (2.4) ci servirà in seguito.

2. Forma lagrangiana delle equazioni di Newton in coordinate cartesiane

In questo paragrafo vogliamo mettere le equazioni di Newton, in coordinate cartesiane, in una forma che come vedremo resterà invariata anche per coordinate lagrangiane generiche. Consideriamo il caso di forze conservative

$$F_i = - \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \tag{2.5}$$

L'equazione di Newton si scrive

$$F_i = m_i a_i \,, \qquad i = 1, \dots 3N \tag{2.6}$$

Esse si possono trasformare nel modo seguente

$$m_i a_i = \frac{d}{dt}(m_i v_i) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2\right) \tag{2.7}$$

dove $T \equiv \frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{x}_j^2$ è chiaramente l'energia cinetica del sistema. Confrontando le 2.5, 2.6, 2.7 otteniamo la seguente relazione

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{2.8}$$

A questo punto introduciamo la funzione L definita come

$$L \equiv T - V \tag{2.9}$$

(Il simbolo $\equiv$ sta ad indicare "definita come").
La (2.8) assume quindi la forma seguente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{2.10}$$

E' facile convincersi a posteriori che effettivamente la (2.10) è una forma diversa di scrivere le (2.6) o le (2.8): quando deriviamo rispetto a $\dot{x}_i$ è come se effettuassimo esclusivamente la derivata dell'energia cinetica in quanto il potenziale non dipende da $\dot{x}_i$, quando invece deriviamo rispetto a x_i è come se derivassimo esclusivamente l'energia potenziale in quanto l'energia cinetica non dipende <u>in questo caso</u> da x_i. L'espressione (2.10) è l'equazione della meccanica nella forma di Lagrange.

3. Equazioni di Lagrange

Faremo vedere ora che le equazioni (2.10) non dipendono dall'uso di coordinate cartesiane e dall'uso di un sistema inerziale. La forma delle equazioni (2.10) è infatti invariante per cambiamenti di coordinate e per cambiamento di riferimento. In generale se $q_1 \dots q_n$ sono le coordinate lagrangiane si ha infatti

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad j = 1, \dots n \qquad (2.11)$$

L essendo la lagrangiana

$$L \equiv T - V$$

scritta in termini delle coordinate q_i, $\dot{q}_i$

$$L(x, \dot{x}, t) = L(x(q,t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t)$$

ottenuta sostituendo nella (2.9) le x, $\dot{x}$ in funzione delle q e $\dot{q}$.

Dimostriamo ora la (2.11). La dimostrazione è effettivamente molto semplice e si può fare verificando le eq. (2.11) direttamente. Si ha infatti:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

(Tale uguaglianza si è ottenuta usando l'identità (2.4)).

Pertanto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum\left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) =$$

$$= \sum\left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\right)\right) = \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

(si noti che $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$)

Ponendo per comodità $Q_j \equiv \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ che chiameremo componente generalizzata delle forze

otteniamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \qquad (2.12)$$

Esse sono praticamente le equazioni di Lagrange. Se come abbiamo fatto precedentemente consideriamo il caso in cui le F_i sono conservative otteniamo:

$$Q_j = \sum F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Quindi sostituendo quest'ultima espressione nella formula (2.12) avremo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) \qquad (2.13)$$

Basta ora ricordare che $T - V \equiv L$ e che il potenziale V è indipendente da $\dot{q}_j$: $V(x) = V(x(q,t)) = V'(q,t)$ per poter scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \qquad (2.14)$$

Abbiamo così dimostrato che le equazioni di Lagrange possono essere scritte utilizzando coordinate generalizzate, che, come sappiamo semplificano notevolmente i problemi di meccanica. Da notare, a questo punto, le equazioni (2.10) e (2.14) hanno la stessa forma, qualunque sia il sistema di riferimento scelto.

Prima di concludere vediamo quali sono i vantaggi ottenuti con la formulazione lagrangiana delle equazioni della meccanica.

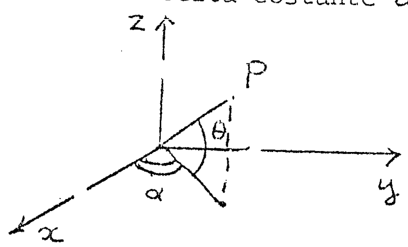
1) Le equazioni sono scritte in termini delle sole coordinate necessarie per descrivere il moto del sistema. Non ci sono quindi coordinate sovrabbondanti, né reazioni vincolari.
2) Le equazioni hanno la stessa forma indipendentemente dalla scelta delle coordinate lagrangiane. Non c'è quindi il problema delle forze apparenti (come vedremo di esse si tiene conto automaticamente, vedi Problema 2).

quindi non fondamentale [illegible] per [illegible] di riferimento

3) La schematizzazione del problema è ridotta alla determinazione di una sola funzione scalare L, che contiene in pratica tutte le informazioni sulla dinamica del sistema in esame. Le equazioni del moto si ottengono da essa per semplice derivazione. Per vedere un'immediata applicazione di quanto detto sopra risolviamo il problema n° 1 con il metodo lagrangiano.

Problema n° 1'

Un punto materiale P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio r in un piano verticale. Scrivere l'equazione del moto di P nel caso in cui il disco ruoti rispetto al diametro verticale con velocità costante ω.



Soluzione:

prima di effettuare i calcoli relativi al problema conviene notare le cose seguenti:

1) gradi di libertà del sistema: è uno solo in quanto il moto di rotazione attorno all'asse z è fissato e basta la posizione di P sul cerchio per individuare la posizione di P.
2) la coordinata lagrangiana più conveniente è l'angolo θ (vedi figura).
3) per scrivere le equazioni di Lagrange dobbiamo esprimere pertanto la lagrangiana L come funzione di θ e $\dot{\theta}$.

L'espressione di T in coordinate cartesiane relative ad un sistema di riferimento inerziale è la seguente

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) \tag{2.15}$$

Dobbiamo dunque trasformare questa espressione in una funzione di θ e $\dot{\theta}$. Tale trasformazione si effettua nella seguente maniera:

$$x = r\cos\theta\cos\alpha\,, \qquad y = r\cos\theta\sin\alpha\,, \quad z = r\sin\theta$$

$$\dot{x}^2 = r^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha\sin^2\theta + 2r^2\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\, s\ldots$$

$$\dot{y}^2 = r^2\dot{\theta}\sin^2\theta\sin^2\alpha + r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\theta\cos^2\alpha - 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha\;\dot{\alpha}$$

$$\dot{z}^2 = r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$$

da cui sostituendo nella (2.15) otteniamo l'espressione dell'energia cinetica in coordinate polari

$$T = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right), \qquad \dot{\alpha} = \omega \qquad (2.16)$$

(Questa è l'energia cinetica espressa in coordinate polari quando r è costante (come nel caso del nostro problema). Se invece r fosse variabile l'espressione più generale dell'energia cinetica sarebbe

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

D'altra parte si ha ovviamente

$$V = mgr\sin\theta$$

A questo punto basta applicare la (2.14) del § 3 e le equazioni di Lagrange si ottengono per semplice derivazione

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}r^2\dot{\alpha}^2\,2\sin\theta\cos\theta - mgr\cos\theta$$

$$mr^2\ddot{\theta} = -mr^2\dot{\alpha}^2\sin\theta\cos\theta - mgr\cos\theta$$

da cui ricordando ancora una volta che $\dot{\alpha} = \omega$ = costante avremo definitivamente

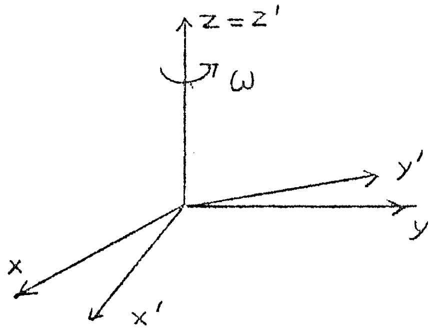
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\cos\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

Come si può notare le equazioni di moto del problema 1 e 1' sono identiche. Si nota altresì che il metodo lagrangiano è estremamente più semplice dal lato concettuale in quanto una volta scritto il valore dell'energia cinetica e potenziale si tratta di effet-

tuare semplici derivate per ottenere l'equazione di moto.
In particolare il problema delle forze apparenti e delle reazioni vincolari che complicano considerevolmente le equazioni di moto nella formulazione newtoniana, è totalmente superato.

4. Forze apparenti e coordinate lagrangiane

Discutendo della formulazione newtoniana dell'equazione del moto di un corpo abbiamo parlato delle forze apparenti. Sorge a questo punto una domanda: usando le equazioni di Lagrange dove vanno a finire le forze apparenti quali la forza centrifuga e la forza di Coriolis? Possiamo rispondere a questa domanda considerando un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{R}$, ed uno non inerziale $\mathcal{R}'$ che si muove rispetto ad esso con velocità angolare ω costante. Le forze apparenti si possono identificare confrontando le equazioni di Lagrange scritte nei due sistemi di riferimento. Se x, y, z sono le coordinate di un punto rispetto ad $\mathcal{R}$ ed x', y', z' le coordinate dello stesso punto rispetto ad $\mathcal{R}'$, si avrà



$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = y'\cos\omega t + x'\sin\omega t$$
$$z = z'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\dot{x} = \cos\omega t\,(\dot{x}' - y'\omega) - \sin\omega t\,(\omega x' + \dot{y}')$$
$$\dot{y} = \cos\omega t\,(\dot{y}' + x'\omega) + \sin\omega t\,(\dot{x}' - y'\omega)$$
$$\dot{z} = \dot{z}'$$

Per scrivere le equazioni di Lagrange rispetto alle coordinate x, y, z e x', y', z' dobbiamo esprimere l'energia cinetica T come funzione di x, y, z; $\dot x, \dot y, \dot z$, e x', y', z'; $\dot x', \dot y', \dot z'$ rispettivamente. Nel sistema inerziale $\mathcal{R}$ si ha ovviamente

$$T = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

D'altra parte

$$\dot x^2 = \cos^2\omega t(\dot x' - y'\omega)^2 + \sin^2\omega t(\omega x' + \dot y')^2 - 2\cos\omega t \sin\omega t (\dot x' - \dot y\omega)\cdot(x'\omega + \dot y')$$

$$\dot y^2 = \cos^2\omega t(\dot y' + x'\omega)^2 + \sin^2\omega t(\dot x' - \omega \dot y') + 2\cos\omega t\sin\omega t(\dot y' + x'\omega)\cdot(\dot x' - \omega y')$$

$$\dot z^2 = \dot z'^2$$

da cui

$$\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = (\dot x' - y'\omega)^2 + (\dot y' + x'\omega)^2 + \dot z'^2 =$$
$$= \dot x'^2 + y'^2\omega^2 - 2\dot x' y'\omega + \dot y'^2 + x'^2\omega^2 + 2\dot y' x'\omega + \dot z'^2$$

Pertanto si ha anche

$$T = \frac{1}{2} m(\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2) + m\omega(\dot y' x' - \dot x' y') + \frac{1}{2} m\omega^2 (x'^2 + y'^2)$$

Se scriviamo ora le equazioni di Lagrange nelle coordinate x', y', z' abbiamo che le forze apparenti appaiono tramite le derivate dell'energia cinetica rispetto a x', y', z' e $\dot x', \dot y', \dot z'$; infatti si ha

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m\omega \dot y' + m\omega^2 x'$$

da cui si nota che il primo dei due termini, è metà della forza di Coriolis mentre il secondo termine rappresenta la forza centrifuga. La rimanente parte della forza di Coriolis la otterremo derivando l'energia cinetica rispetto a $\dot x'$ e poi rispetto al tempo.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x'} = \frac{d}{dt}(m\dot x' - m\omega y') = m\ddot x' - m\dot y'\omega$$

il 2° termine rappresenta la seconda parte della forza di Coriolis cercata). A questo punto ricordando la (2.14) del § 3 e notando che

$V = 0$ potremo scrivere:

$$m\ddot{x}' = m\omega\dot{y}' + m\dot{\omega}^2 x' + m\omega\dot{y}' = 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x' \qquad (2.18)$$

l'equazione (2.18) ci dà un'espressione completa delle forze apparenti cercate. E' facile riconoscare nei termini di destra della (2.18) l'espressione della forza centrifuga $m\omega^2 x'$ e l'espressione della forza di Coriolis $2m\omega\dot{y}'$. Un risultato simile si ottiene anche derivando rispetto a y' e $\dot{y}'$. Allo stesso modo si può discutere la forza apparente dovuta al fatto che un sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ si muove di moto traslatorio con accelerazione a rispetto ad un sistema inerziale $\mathcal{R}$ (v. Problema I).

5. Potenziale generalizzato

Nella formulazione newtoniana, una notevole semplificazione del problema si ottiene quando le forze sono conservative, cioè derivano da un potenziale V.

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (2.19)$$

Tale proprietà si mantiene nella formulazione lagrangiana. Dalle equazioni (1) segue infatti che anche le forze generalizzate derivano da un potenziale

$$Q_j \equiv F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (2.20)$$

La formulazione lagrangiana offre il vantaggio di poter introdurre un potenziale anche in casi più generali, in particolare quando le forze dipendono dalle $\dot{q}$. Infatti una condizione sufficiente per introdurre la lagrangiana è che le forze generalizzate Q_j possano scriversi nel modo seguente

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (2.21)$$

dove U è una funzione di $q, \dot{q}, t$: $U = U(q, \dot{q}, t)$.
In questo caso infatti le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{2.22}$$

possono scriversi nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{2.23}$$

pur di definire

$$L = T - U \tag{2.24}$$

E' chiaro che l'equazione (2.21) contiene come caso particolare la (2.20). Basta infatti che la U non dipenda da $\dot{q}$. Otteniamo pertanto una generalizzazione del concetto di potenziale.
Un esempio molto importante in cui si utilizzano le eq. (2.21) è dato dal problema seguente

Problema

Mettere in forma lagrangiana le equazioni di moto di un elettrone in campo elettromagnetico.

Soluzione:
le equazioni in forma cartesiana sono le seguenti

$$m\ddot{x}_i = +e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right)_i \qquad \text{e cambi il segno}$$

Non è difficile verificare che la forza F_i può essere scritta nella forma seguente

$$F_i = +e\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\varphi(x,t) + \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(x,t)\right) \tag{2.25}$$

dove $\varphi(x,t)$ è il potenziale scalare e $\vec{A}(x,t)$ è il potenziale vettore.
Infatti dalle (2.25) si ha

$$F_i = e\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\frac{dA_i}{dt} + \frac{e}{c}v_j\frac{\partial}{\partial x_i}A_j =$$

$$= e\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e}{c}\dot{x}_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{e}{c}\dot{x}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

e non è difficile riconoscere nei primi due termini la forza dovuta al campo elettrico

$$-eE_i = -e\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_i\right]$$

e negli ultimi due termini la forza dovuta al campo magnetico

$$-e(\vec{v}\wedge B)_i = -e(\vec{v}\wedge \mathrm{rot}\vec{A})_i = -e\,\varepsilon_{ij\ell}\,\varepsilon_{jmr}\,v_\ell\frac{\partial}{\partial x_m}A_r$$

$$= -e(\delta_{ir}\delta_{\ell m} - \delta_{im}\delta_{\ell r})v_\ell\frac{\partial}{\partial x_m}A_r =$$

$$= -e\left(v_m\frac{\partial}{\partial x_m}A_i - v_m\frac{\partial}{\partial x_i}A_m\right)$$

Pertanto le equazioni di un elettrone in campo elettromagnetico si possono scrivere nella forma $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ dove

$$L = T - U, \qquad U = e\left(\varphi + \frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{A}\right)$$

Tali equazioni restano invariate anche se scritte per coordinate lagrangiane generiche q_i, non necessariamente cartesiane. Basta per questo verificare che la proprietà (2.25) si mantiene anche per coordinate generalizzate.

$$Q_j = F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

avendo usato le relazioni $\partial x_i/\partial q_j = \partial \dot{x}_i/\partial \dot{q}_j$; $\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$

Teorema di Larmor

La possibilità di scrivere le equazioni di una particella carica in un campo elettromagnetico, in coordinate lagrangiane permette di fare facilmente cambiamenti di riferimento e di semplificare la trattazione di alcuni problemi di elettrodinamica. Soprattutto le difficoltà pratiche derivanti dalla trasformazione dei campi elettrico e magnetico nel passaggio da un riferimento ad un altro sono, in tal modo, automaticamente superate. Come per il caso delle forze apparenti, della trasformazione del campo elettromagnetico da un riferimento all'altro si tiene automaticamente conto esprimendo la lagrangiana e in particolare il potenziale elettromagnetico U in funzione delle nuove coordinate. Come esempio consideriamo il problema seguente.

Problema n° 3

Studiare il moto di una particella carica in un potenziale centrale in presenza di un campo magnetico uniforme costante; per esempio un elettrone in orbita legata attorno ad un nucleo, in presenza di un campo magnetico uniforme e costante $\vec{H}_0$.

Soluzione:

la massa del nucleo è molto più grande di quella dell'elettrone e quindi il nucleo può con ottima approssimazione essere considerato fisso. La lagrangiana si riduce dunque alla lagrangiana di un elettrone in campo elettromagnetico

$$L = T - V(r) + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} \,, \qquad (V = \text{potenziale coulombiano})$$

A questo punto è utile scegliere le coordinate nel modo più conveniente. E' chiaro che la presenza di un campo magnetico uniforme, riduce la simmetria del problema da sferica a cilindrica. Sceglieremo pertanto come asse z la direzione del campo magnetico e le coordinate polari nel piano perpendicolare. Descriviamo pertanto il moto dell'elettrone mediante coordinate cilindriche definite da:

$$x = \rho\cos\theta \,, \qquad y = \rho\sin\theta$$

$$z = z$$

Si ha allora

$$v_x = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\sin\theta\,\dot{\theta} \,, \quad v_y = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \,, \quad v_z = \dot{z}$$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \,, \quad V(r) = V'(\rho, z) \,, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{A} = +\frac{1}{2}H_0 y\dot{x} - \frac{1}{2}H_0 x\dot{y} = -\frac{1}{2}H_0\rho^2\dot{\theta} \,, \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{x}\wedge\vec{H}_0$$

Quindi la lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + z^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - V(\rho, z) - \frac{e}{2c} H_0 \rho^2 \dot{\theta}$$

Abbiamo tre coordinate lagrangiane ρ, θ, z. L'equazione lagrangiana per θ diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \left(\dot{\theta} - \frac{e H_0}{2mc}\right) = \text{costante} \qquad (2.27)$$

L'equazione (2.27) dice che la costante del moto non è la componente del momento angolare orbitale lungo l'asse z

$$\underline{L_z = m\rho^2 \dot{\theta}}$$

ma la somma

$$L_z - \frac{e H_0}{2mc} m \rho^2$$

Ritorneremo in seguito sull'interpretazione fisica di tale risultato. Per ora ci limitiamo a osservare che l'effetto del campo magnetico è lo stesso di quello che si avrebbe aggiungendo alla velocità angolare orbitale $\dot{\theta}$ la velocità angolare $\omega_L = eH_0/2mc$. Per capire meglio mettiamoci in un sistema di riferimento che ruoti rispetto al precedente con velocità angolare ω_L. Ciò equivale a passare ad un nuovo sistema di coordinate lagrangiane(1)

$$\rho' = \rho, \qquad z' = z, \qquad \theta' = \theta - \frac{e H_0}{2mc} t \qquad (2.28)$$

Nelle nuove coordinate la lagrangiana assume la forma seguente

$$L'(\rho', \theta', z') = L(\rho(\rho', \theta', z'), \theta(\rho', \theta', z'), z(\rho', \theta', z'))$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}'^2 + \rho'^2 \dot{\theta}'^2 + \dot{z}'^2) - V(\rho', z') - \frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L^2$$

---

(1) Il cambiamento di riferimento non sarebbe stato altrettanto facile nella formulazione newtoniana. La trasformazione del campo magnetico richiede in questo caso molta attenzione come sarà chiaro in seguito.

Il fatto che la variabile θ', come succedeva precedentemente per θ, non compaia esplicitamente in L' implica che la quantità

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}'} = m \rho'^2 \dot{\theta}'$$

è una costante del moto. In tale riferimento dunque la componente z del momento angolare orbitale non dipende dal tempo. Inoltre l'effetto del campo magnetico si è ridotto al termine $\frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L$ che può essere conglobato in V. La lagrangiana pertanto assume la stessa forma di quella in assenza di campo magnetico.
Vediamo di capire meglio cosa è successo. Il termine $\frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L^2$ è essenzialmente la forza apparente centrifuga dovuta al fatto che il nuovo sistema di coordinate non è inerziale. L'altra forza apparente, cioè la forza di Coriolis $2m\vec{v} \wedge \vec{\omega}_L$ è proprio servita ad annullare la forza dovuta al campo magnetico $e\vec{v} \wedge \vec{H}_0$.

$\vec{\omega}_L \parallel \vec{H}_0$

La frequenza ω_L è stata scelta proprio per ottenere tale effetto. E' questo un risultato interessante: pur di mettersi in un riferimento opportuno si può annullare l'effetto del campo magnetico mediante la forza apparente di Coriolis.
Per concludere le equazioni del moto sono essenzialmente le stesse di quelle in assenza di campo magnetico, con la sola aggiunta della forza centrifuga $m\rho' \omega_L^2$. Essa può essere considerata come derivante del potenziale centrifugo

$$V_c = \frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L^2$$

e quindi equivale ad una ridefinizione di V.

$$V \to V + V_c$$

In effetti, in molti casi di interesse fisico come ad esempio per un elettrone atomico V_c è molto piccolo e può essere trascurato con buona approssimazione. In questo caso la discussione si semplifica e il risultato ottenuto può riassumersi dicendo che l'introduzione del campo magnetico ha essenzialmente l'effetto di far cambiare la velocità angolare dell'elettrone della quantità ω_L. Abbiamo visto infatti che il moto dell'elettrone resta inalterato pur di mettersi in un sistema che ruoti rispetto a quello considerato all'inizio, con velocità angolare ω_L. Di tale fenomeno, in apparenza difficile da capire, si può dare una spiegazione fisica più intuitiva e meno formale. Si pensi di avere un elettrone in un'orbita circolare e di far nascere lentamente un campo magnetico H_0 uniforme, diretto come l'asse z. Il momento della forza di Lorentz dovuta ad $\vec{H_0}$, è nullo rispetto all'asse z; sembra strano pertanto che la componente del momento angolare rispetto allo asse z possa cambiare dal valore iniziale $m\rho^2\dot{\theta}$ al valore finale $m\rho^2(\dot{\theta} - \frac{eH_0}{2mc})$. In effetti nel processo di "accensione" del campo magnetico, il flusso del campo magnetico attraverso l'orbita circolare varia, dando luogo ad un campo elettrico. Il momento della forza dovuta al campo elettrico non è nullo rispetto all'asse z e il suo effetto è proprio quello di cambiare il momento angolare dell'elettrone.

Riassumendo, la spiegazione del fatto che la costante del moto sia la quantità $m\rho^2(\dot{\theta} - \frac{eH_0}{2mc})$ e non $m\rho^2\dot{\theta}$, sta nel fatto che ad una variazione del campo magnetico è associato un campo elettrico.

CAPITOLO III

EQUAZIONI DI HAMILTON

1. Equazioni di Lagrange e momenti coniugati

L'utilità della formulazione Lagrangiana è stata discussa nel capitolo precedente. Ora ci proponiamo di discutere l'interpretazione fisica delle equazioni di Lagrange. Tale interpretazione diviene particolarmente semplice nel caso di coordinate cartesiane inerziali (v. Cap. II § 2). In questo caso le equazioni di Lagrange si possono scrivere anche nella forma seguente

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

dove

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

è proprio il momento della quantità di moto. In questo caso, le equazioni di Lagrange traducono il fatto fisico che la variazione di quantità di moto è dovuta ad una forza $\partial L / \partial x_i$. Cerchiamo di mantenere tale analogia anche nel caso generale, definendo come momento coniugato alla variabile q_i , la quantità

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i . \tag{3.2}$$

Le equazioni di Lagrange assumono allora la forma seguente

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{3.3}$$

e si possono interpretare dicendo che la quantità $\partial L / \partial q_i$ ha per effetto una variazione rispetto al tempo del momento p_i , in analogia col caso newtoniano.

Non sarebbe giusto, tuttavia, ridurre tale analogia ad una analogia puramente formale. Come vedremo meglio in seguito, essa ha un significato fisico più profondo e traduce importanti proprietà del sistema come le sue proprietà di simmetria etc.

Prima di entrare in tale discussione vediamo su esempi concreti il significato fisico delle quantità p_i e $\partial L/\partial q_i$.

<u>Esempio 1.</u> Studiamo il moto di una particella di massa m soggetto ad un potenziale centrale $V=V(r)$. Per concretezza ci si può riferire ad un elettrone soggetto al potenziale coulombiano $V(r) = Ze^2/r$ del nucleo.

Il sistema ha simmetria sferica e pertanto conviene descriverlo mediante coordinate polari sferiche r, θ, φ

$$x = r\sin\theta\,\overset{\cos\varphi}{\cancel{\sin\varphi}}, \qquad y = r\sin\theta\,\overset{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}}, \qquad z = r\cos\theta$$

Come già abbiamo visto nel capitolo precedente, l'energia cinetica assume la forma seguente, in termini delle coordinate lagrangiane $r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) \tag{3.4}$$

Non è difficile determinare i momenti p_r, p_θ, p_φ coniugati alle variabili r, θ, φ

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{3.5}$$

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{3.6}$$

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \tag{3.7}$$

L'interpretazione fisica è abbastanza evidente. p_r può interpretarsi come ~~momento del~~la quantità di moto radiale e p_φ è la <u>componente z del momento angolare</u>. L'equazione di Lagrange relativa alla coordinata φ

$$\frac{d}{dt}p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

traduce il fatto che il momento delle forze rispetto all'asse z è nullo e pertanto la componente z del momento angolare è una costante del moto

$$L_z = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \text{cost} = mr_0^2\sin^2\theta_0\,\dot{\varphi}_0 \tag{3.8}$$

Il problema si semplifica se si sceglie l'asse z diretto come il raggio vettore $\vec{r}(0)$ al tempo t=0. In tal caso si ha $\theta_0 = 0$ e quindi la (3.8) dà

$$L_z = \text{cost} = 0$$

Siccome la (3.8) deve valere ad ogni istante, l'annullarsi di $r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$ ad ogni istante implica che $\dot{\varphi} = 0$, cioè φ = costante. Il moto si svolge dunque nel piano φ = cost. Con tale scelta di coordinate p_θ diviene il momento angolare relativo al moto piano della particella. L'equazione di Lagrange relativa alla coordinata θ esprime allora la costanza del momento angolare

$$\frac{d}{dt} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = m r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2 = 0 \qquad (\text{essendo } \dot{\varphi} = 0)$$

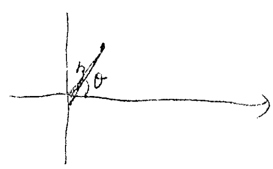
In effetti $\partial L/\partial\theta$ dà il momento delle forze rispetto ad un asse perpendicolare al piano φ = cost (piano del moto) e il suo annullarsi implica che il momento angolare è una costante del moto

$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{cost} \equiv \ell \qquad (3.9)$$

Concludendo i momenti coniugati alle coordinate polari φ e θ hanno una diretta interpretazione fisica in termini di componenti del momento angolare e le derivate della lagrangiana rispetto a φ e θ corrispondono ai momenti delle forze. Le equazioni di Lagrange esprimono in questo caso l'equazione cardinale della meccanica relativa al momento angolare.
Il moto di una particella soggetta a forza centrale è dunque un moto piano con momento angolare costante. E' questa essenzialmente la seconda legge di Keplero relativa ai moti dei pianeti. Sul moto radiale ritorneremo in seguito.

Esempio 2. Un caso particolare dell'esempio 1 è quando già in partenza si sa che il moto si svolge su un piano, e il potenziale è centrale.
Introducendo coordinate polari piane

$$x = r\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\,\theta, \qquad y = r\,\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\,\theta$$



si ha

$$T = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2)$$

e i momenti coniugati sono

$$p_r = m\dot r\,, \qquad p_\theta = m r^2 \dot\theta$$

E' facile riconoscere in p_θ il momento angolare. L'equazione di Lagrange per θ è

$$\frac{d}{dt} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

e di nuovo se il potenziale non dipende da θ, $\partial L/\partial\theta = 0$, e il momento angolare è una costante del moto.

Meno diretta sarebbe stata tale conclusione nella formulazione newtoniana cartesiana. Supponiamo di scegliere l'asse z normale al piano del moto e indichiamo con M_z il momento delle forze relativo all'asse z:

$$M_z = (\vec r \wedge \vec F)_z = x_1 F_2 - x_2 F_1 = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) V$$

$$= \left[r \sin\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - r\cos\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] V$$

$$= r\left(\sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial x_2} - \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} V = r\left(\frac{x_1^2}{r} + \frac{x_2^2}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} V$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} V$$

Abbiamo così ritrovato il risultato della formulazione lagrangiana: se la forza deriva da un potenziale, il momento della forza rispetto all'asse normale al piano del moto è data dalla derivata del potenziale rispetto a θ.

Un risultato analogo vale anche nel caso tridimensionale. Se si scelgono come nell'esempio 1, coordinate polari sferiche r, θ, φ il momento delle forze rispetto all'asse z è dato dalla derivata del potenziale rispetto a φ (*)

(*) L'identità

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

sarà molto utile quando si tratterà il problema nello schema della Meccanica Quantistica.

$$M_z = x_1 F_2 - x_2 F_1 = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) V = \frac{\partial}{\partial \varphi} V \qquad (3.11)$$

I risultati (3.8) e (3.11) non sono totalmente inaspettati, in quanto traducono precise proprietà di simmetrie del sistema. Ad esempio se il potenziale è indipendente da θ, il sistema ha simmetria di rotazione attorno all'asse z e pertanto la forza, avendo direzione ortogonale alle superfici equipotenziali, è diretta radialmente ed ha necessariamente momento nullo.
E' interessante notare a questo punto che il contenuto delle eq. (3.8) e (3.11) è piuttosto riposto nella formulazione newtoniana cartesiana e diviene invece trasparente nella formulazione lagrangiana. Ciò è dovuto al fatto che per le particolari proprietà di simmetria del sistema le coordinate cartesiane non sono le più adatte. Coordinate più intrinseche al sistema in esame, quali le coordinate polari sferiche o polari piane, permettono di descrivere in maniera molto semplice le proprietà di simmetria del sistema e le loro notevoli conseguenze fisiche. Pertanto l'introduzione dei momenti coniugati p_θ, p_φ va assai oltre la ricerca di un'analogia formale con le equazioni di Newton. Essi appaiono come le variabili dinamiche più adatte per caratterizzare il moto del sistema.

Esempio 3. Come ulteriore esempio riprendiamo il problema di una una particella carica soggetta ad un potenziale coulombiano e ad un campo magnetico costante (teorema di Larmor, Cap. II § 5).
In coordinate cilindriche ρ, θ, z la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, z) - \frac{e}{2c} \rho^2 H_0 \dot{\theta}$$

e il momento coniugato alla variabile θ è

$$p_\theta = m\rho^2 \left(\dot{\theta} - \frac{eH}{2mc}\right)$$

Ricordiamo che p_θ è una costante del moto e differisce dalla componente z del momento angolare. A prima vista, p_θ sembre-rebbe avere una interpretazione fisica meno diretta del momento angolare e quindi l'introduzione della variabile p_θ potrebbe sembrare un trucco puramente formale. In effetti, abbiamo già discusso a proposito del teorema di Larmor sul significato fisico del termine $eH/2mc$ e sul fatto che è la quantità p_θ che caratterizza il sistema particella + campo magnetico (il momento angolare orbitale si riferisce solo ad una 'parte' del sistema). E' infatti p_θ e non il momento angolare orbitale che è una costante del moto

$$\frac{d}{dt} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \,, \qquad p_\theta = \text{cost} \tag{3.12}$$

Anche in questo caso, pertanto, il momento coniugato p_θ si rivela una variabile più adatta per caratterizzare il moto del sistema che non il momento angolare ordinario. Di nuovo, l'uso di coordinate più intrinseche al sistema e alle sue proprietà di simmetria, ha suggerito, tramite la formulazione lagrangiana, l'introduzione di variabili dinamiche più adatte al problema.

2. Variabili cicliche o ignorabili, momenti coniugati

Dovrebbe essere evidente dagli esempi discussi nel paragrafo precedente che i momenti coniugati p_i rappresentano variabili dinamiche di notevole importanza fisica e che quindi la loro introduzione non si riduce ad un trucco formale per ottenere un'analogia con le equazioni di Newton. Ora vogliamo discutere più in dettaglio la relazione tra momenti coniugati e proprietà di simmetria.

Una caratteristica generale incontrata negli esmepi precedenti è che se la lagrangiana non dipende dalla coordinata lagrangiana q_i, il relativo momento coniugato $p_i \equiv \partial L/\partial \dot{q}_i$, è una costante del moto

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \,, \qquad p_i = \text{cost} \tag{3.13}$$

(una variabile q_i, che non compaia nella lagrangiana, viene chiamata variabile ciclica o ignorabile). Non è difficile verificare sugli esempi precedenti che l'eq. (3.13) traduce una proprietà di simmetria del sistema. Nell'esempio 1, l'eq. (3.13) o (3.8) corrisponde alla simmetria per rotazioni attorno all'asse z, mentre la (3.9) equivale alla simmetria per rotazioni attorno all'asse normale al piano del moto. Analogamente le eq. (3.10), (3.11), (3.12), traducono equivalenti proprietà di simmetria di rotazione. In particolare la (3.12) esprime matematicamente il fatto che il sistema ha simmetria cilindrica. In conclusione, possiamo notare che la conservazione della componente z del momento angolare è strettamente legata al fatto che il sistema è invariante per rotazioni attorno all'asse z.

Esempio 4. Vediamo a quale legge di conservazione porta il fatto che la coordinata cartesiana x_1 è ciclica o ignorabile. Per concretezza studiamo il caso molto semplice in cui un punto materiale di massa m è soggetto ad un potenziale indipendente da x_1 :

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) - V(x_2, x_3)$$

Si ha immediatamente che $p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1$ è una costante del moto

$$\frac{d}{dt} p_1 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.$$

L'invarianza per traslazioni nella direzione x_1 , porta dunque alla conservazione ~~del momento~~ della quantità di moto nella direzione x_1 .

— . —

In generale, possiamo concludere che se una variabile q_i è ignorabile, il sistema è invariante per trasformazioni: $q_i \rightarrow q_i + a$ $q_j \rightarrow q_j$, $j \neq i$, cioè è invariante per "traslazioni" rispetto alla variabile q_i . Nel caso in cui q_i sia una variabile angolare (θ o φ) tali trasformazioni

$$q_i \longrightarrow q_i + a \qquad (3.14)$$

corrispondono a rotazioni (v. Esempi 1, 2, 3). Nel caso in cui q_i sia una variabile cartesiana le trasformazioni (3.14) sono traslazioni propriamente dette.

Ritorneremo in seguito su tali proprietà di fondamentale importanza per la fisica classica e soprattutto per la fisica moderna. Per ora, ci limitiamo ad osservare come i legami tra costanti del moto e proprietà di simmetria siano assai più riposti e meno apparenti nella formulazione newtoniana cartesiana (si veda l'esempio 2 del § 1).

3. Funzione Hamiltoniana

Si è visto nei paragrafi precedenti che integrali primi classici quali il momento angolare, il momento della quantità di moto etc. sono descritti dai momenti $p_i \equiv \partial L/\partial \dot{q}_i$, coniugati alle variabili lagrangiane q_i. Vedremo ora a cosa corrisponde l'integrale dell'energia.

Cominciamo col far vedere che se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo la quantità

$$H \equiv \sum p_i \dot{q}_i - L \tag{3.15}$$

è una costante del moto. Infatti

$$\frac{d}{dt} H = \left(\frac{d}{dt} p_i\right)\dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Pertanto se valgono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.16}$$

e se $\partial L/\partial t = 0$ si ha

$$H = \text{costante} . \tag{3.17}$$

Vediamo su alcuni esempi concreti il significato fisico di H.

Esempio 4. Consideriamo un punto materiale soggetto a forza elastica kx (oscillatore armonico). Si ha facilmente

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$H = m\dot{x}\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \tag{3.18}$$

dunque H coincide in questo caso con l'energia del punto materiale e la sua conservazione è una conseguenza del fatto che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.

Esempio 5. Studiamo ora una particella carica in campo elettromagnetico. Come abbiamo già discusso precedentemente la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - e\left(\varphi(x) - \frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{A}(x)\right)$$

Pertanto si ha [illegible]

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i$$

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = \sum m\dot{x}_i^2 + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} - \frac{1}{2}m\sum \dot{x}_i^2 +$$

$$+ e\left(\varphi(x) - \frac{\vec{V}}{c}\cdot\vec{A}\right) = \sum \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + e\varphi$$

$$= \frac{p_i^2}{2m} + e\,\varphi(x) \tag{3.19}$$

Anche in questo caso H coincide con l'energia totale della particella (energia cinetica + energia potenziale ( )).

Esempio 6. Un caso interessante è quello studiato nel Problema 1' del Cap. II. La lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta$$

e il momento coniugato alla variabile θ è

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

Pertanto si ha

$$H = mr^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta + mgr\sin\theta =$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta + mgr\sin\theta =$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr\sin\theta - \frac{1}{2}mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta$$

$$= T + V - mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta \qquad (3.20)$$

L'Hamiltoniana differisce dall'energia del punto materiale, rispetto a 1 sistema inerziale $\mathcal{R}$, per il termine $mr^2\dot\alpha\cos^2\theta$.
In effetti, siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, H è una costante del moto

$$\frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr\sin\theta - \frac{1}{2}mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta = \text{cost} \qquad (3.21)$$

mentre l'energia del punto materiale non è una costante del moto dato che il sistema non è isolato e per mantenere il cerchio a velocità angolare costante bisogna compiere lavoro.
Possiamo in realtà verificare che il termine $-mr^2\dot\alpha^2\cos^2\theta$ è proprio il lavoro fatto per mantenere costante la velocità angolare. Usiamo a questo scopo il teorema delle forze vive

$$dT = d\mathcal{L} \qquad (\mathcal{L} = \text{lavoro})$$

Esso ci dice che la variazione dell'energia cinetica nell'intervallo di tempo dt è uguale al lavoro fatto dalle forze esterne.
La variazione di T si calcola facilmente

$$dT = -mr^2\dot\alpha^2\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\,dt + mr^2\dot\theta\,\ddot\theta\,dt \qquad (3.22)$$

D'altra parte il lavoro delle forze esterne è

$$d\mathcal{L} = -dV + d\mathcal{L}' = -mgr\cos\theta\,\dot\theta\,dt + d\mathcal{L}' \qquad (3.23)$$

dove $d\mathcal{L}'$ è il lavoro fatto dal motore per mantenere la velocità angolare costante. Confrontando le (3.22) e (3.23) e usando le equazioni del moto (v. pag. 16) si trova

$$d\mathcal{L}' = 2mr^2\dot\alpha^2\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\,dt$$

Pertanto il lavoro fatto dal motore quando il punto materiale si è spostato da $\theta = -\pi/2$ a θ è dato da

$$\mathcal{L}' = m r^2 \dot\alpha^2 \cos^2\theta$$

In conclusione l'equazione (3.21) traduce il teorema delle forze vive. La funzione H si può interpretare come l'energia totale del sistema punto materiale + motore. E' infatti l'energia totale di questo sistema e non quella di una sua parte (punto materiale) che si mantiene costante).

La (3.21) ci dice un'altra cosa interessante. In un sistema di riferimento solidale al cerchio il termine $p_\theta^2/2mr^2$ rappresenta l'energia cinetica del punto materiale, e $mgr\sin\theta$ rappresenta l'energia potenziale dovuta alla gravità. Il termine $-\frac{1}{2}mr^2\cos^2\theta\,\dot\alpha^2$ rappresenta un tipo di potenziale (potenziale centrifugo): in effetti la forza centrifuga che nel sistema solidale al cerchio è presente quale forza apparente può infatti derivarsi dal potenziale $V_c = -\frac{1}{2}mr^2\cos^2\theta\,\dot\alpha^2$.

La (3.21) ci dice pertanto che nel sistema solidale al cerchio, $\mathcal{R}'$, l'energia del punto materiale, definita come somma di energia cinetica (rispetto a $\mathcal{R}'$), energia potenziale gravitazionale ed energia corrispondente al potenziale centrifugo, si conserva

$$E_{\mathcal{R}'} = T_{\mathcal{R}'} + V + V_c \qquad = \text{costante}$$

(E' forse superfluo notare che

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot\alpha^2\cos^2\theta + r^2\dot\theta^2\right)$$

è l'energia cinetica rispetto al riferimento inerziale $\mathcal{R}$ ed è diversa dall'energia cinetica rispetto al riferimento $\mathcal{R}'$,

$$T_{\mathcal{R}'} = p_\theta^2/2mr^2.)$$

Esempio 7. Per concludere consideriamo il problema di una particella soggetta a potenziale centrale. Ricordando quanto discusso nell'esempio 1 di questo capitolo abbiamo

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \right) - V(r)$$

$$p_r = m\dot{r} \,, \qquad p_\theta = m r^2 \dot{\theta} \,, \qquad p_\varphi = m r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}$$

$$H = m\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$- \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 + V(r)$$

$$= T + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + V(r)$$

(3.24)

Anche in questo caso pertanto la funzione Hamiltoniana coincide con l'energia totale della particella.

— . —

Dagli esempi precedenti è risultato che la quantità H coincide spesso con l'energia del sistema. In effetti si può dimostrare che se il legame tra le coordinate lagrangiane q e le coordinate cartesiane non dipende esplicitamente dal tempo e il potenziale non dipende dalla velocità si ha

1) $V = V(x)$ ind $\dot{x}$

2) $x = (q)$ ind. t

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = T + V \qquad (3.25)$$

Problema. Dimostrare che se il legame tra le q e le x_i non dipende esplicitamente dal tempo:

$$q_i = q_i(x) \,, \qquad x_i = x_i(q) \qquad (3.26)$$

e il potenziale non dipende dalla velocità, si ha l'equazione (3.25).

Soluzione:

Dalle (3.26) si ha

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

e pertanto

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \left(m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

D'altra parte

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{\ell j}\left(m_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial q_j}\frac{\partial x_\ell}{\partial q_i}\dot{q}_j + \right.$$

$$\left. + m_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial q_i}\frac{\partial x_\ell}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \sum m_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial q_j}\frac{\partial x_\ell}{\partial q_i}\dot{q}_j$$

dato che V non dipende da $\dot{q}$. Pertanto

$$\sum p_i \dot{q}_i = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Ottenjamo pertanto

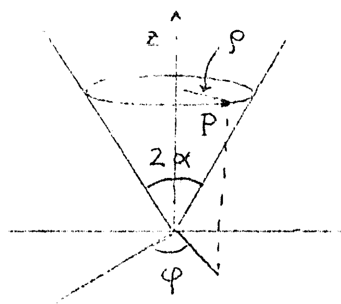
$$H = \sum p_i \dot{q}_i - T + V = 2T - T + V = T + V$$

E' interessante notare che le condizioni discusse nel problema precedente sono sufficienti per garantire che H coincida con l'energia, ma non sono necessarie. Ad esempio, si veda il caso di una particella in campo elettromagnetico in cui il potenziale generalizzato dipende dalla velocità e ciononostante H coincide con l'energia totale.

4. Variabili canoniche.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che spesso le grandezze di maggior significato fisico sono i momenti coniugati alle variabili q_i, mentre le $\dot{q}_i$ non sono altrettanto significative. La situazione è analoga a quella incontrata in meccanica elementare dove è il momento della quantità di moto, e non la velocità, che giuoca un ruolo fondamentale e ha pertanto un significato fisico molto più importante (v. ad es. nei problemi d'urto). Anche negli esempi discussi nei §§ 1, 2 è piuttosto difficile dare alle variabili $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ un significato fisico che non sia semplicemente quello di derivate temporali delle variabili θ, φ. In particolare le proprietà di simmetria e le loro implicazioni fisiche non si traducono in proprietà semplici delle variabili $\dot{q}$, mentre acquistano una forma particolarmente semplice in termini dei momenti p coniugati alle variabili q.

Esempio 8. Studiamo il problema di un punto materiale di massa m vincolata a muoversi all'interno di un cono di apertura 2α posto come in figura, e soggetto alla gravità.



Determinare le orbite circolari.

Soluzione:

Data la simmetria del problema conviene scegliere come coordinate ρ, e φ (v. figura). Siccome il sistema è simmetrico per rotazioni rispetto all'asse z la componenete del momento angolare rispetto all'asse z è una costante del moto. In effetti è facile verificare che

$$L = \frac{1}{2} m\left(\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha}\right) - mg\rho\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} m\rho^2\dot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad p_\varphi = \text{cost}$$

cioè la componente del momento angolare rispetto all'asse z è costante. Le orbite circolari sono quelle per cui ρ = cost. Pertanto la velocità angolare deve essere

$$\dot{\varphi} = \text{cost}/m\rho^2$$

Si noti come la simmetria per rotazioni rispetto all'asse z implichi la costanza di p_φ, mentre $\dot{\varphi}$ è costante solo se l'orbita è circolare cioè ρ = cost.

—— · ——

In realtà, la stessa funzione lagrangiana, essendo la differenza tra energia cinetica ed energia potenziale, non ha un particolare significato fisico. Inoltre, a parte il caso di coordinate cicliche, la equazioni di Lagrange sono equazioni nelle variabili q, $\dot{q}$

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = f(q, \dot{q}, t) \tag{3.27}$$

mentre sarebbe più significativo avere delle equazioni in termini delle sole q e p, (che come abbiamo visto sono le quantità di maggiore significato fisico), in modo da usare le q e p come variabili per descrivere lo stato del sistema (variabili canoniche).
Infine, val la pena di notare che una quantità importante come l'energia e le sue proprietà di conservazione appaiono piuttosto indirettamente nel formalismo lagrangiano.
Tutto ciò suggerisce le seguenti domande

1) E' possibile riscrivere le equazioni di Lagrange in una forma in cui intervengono solo le variabili canoniche q e p?
2) E' possibile far intervenire la funzione Hamiltoniana del sistema, anzichè la Lagrangiana, quale funzione fondamentale, in termini della quale scrivere le equazioni del moto?

A tali domande dà una risposta affermativa la formulazione Hamiltoniana (o equazioni di Hamilton), come vedremo nel prossimo paragrafo. In effetti, come vedremo nei prossimi capitoli, le equazioni di Hamilton non risolvono solo i problemi 1) e 2) ma hanno altri notevoli vantaggi sulle equazioni di Lagrange.

5. Equazioni di Hamilton.

Cominciamo con lo scrivere l'Hamiltoniana come funzione delle variabili canoniche q, p. Siccome nella definizione di H compaiono le $\dot{q}$ bisogna scrivere le $\dot{q}$ in funzione delle q, p. A questo scopo notiamo che le p sono definite dall'equazione

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t) \tag{3.28}$$

cioè le p sono funzioni delle q, $\dot{q}$, t. Sotto opportune condizioni matematiche, che non vogliamo discutere ora, le equazioni (3.28) si possono invertire, in modo da ottenere le $\dot{q}$ in funzione delle q, p, t

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t) \tag{3.29}$$

<u>Esempi</u>. Si vedano gli esempi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dove si sono usate le (3.29) per eliminare le $\dot{q}$ nell'espressione di H.

A questo punto possiamo scrivere l'Hamiltoniana in funzione delle sole q e p sostituendo a $\dot{q}$ la sua espressione (3.29) in termini delle q, p.

$$\begin{aligned} H &= \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) = \sum p_i \dot{q}_i(q, p, t) \\ &\quad - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \\ &= H(q, p, t) \end{aligned} \tag{3.30}$$

(Di nuovo rimandiamo agli esempi 1–7).

Per ottenere le equazioni di Hamilton basta calcolare il differenziale di H considerata una volta come funzione di q, p, t e una volta come funzione di q, $\dot{q}$, t:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad ;$$

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{q}_i dp_i - \left(\frac{d}{dt} p_i\right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Da notare che nell'ultimo passaggio si è usata la definizione di p e le equazioni di Lagrange. Mentre i passaggi precedenti traducono solo proprietà analitiche valide per qualunque funzione, l'ultimo passaggio facendo entrare in maniera decisiva le equazioni di Lagrange dà un contenuto dinamico all'ugualianza finale.

Paragonando le due espressioni ottenute per dH, si ha

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i\right) dp_i + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right) dq_i + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t}\right) dt = 0 \qquad (3.31)$$

Se ora consideriamo le variabili q_i, p_i, t come variabili indipendenti, i differenziali dq_i, dp_i, dt saranno pure indipendenti e potranno assumere valori arbitrari. L'equazione (3.31) può valere allora solo se i coefficienti dei differenziali dq_i, dp_i, dt sono nulli

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3.32)$$

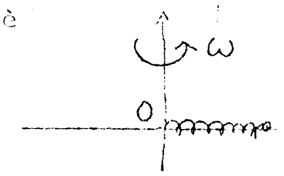
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (3.33)$$

Le (3.32) sono le equazioni di Hamilton. Notiamo subito che esse sono $2n$ equazioni, mentre le equazioni di Lagrange erano n. La ragione è che nelle equazioni di Lagrange le variabili indipendenti sono n (le n coordinate lagrangiane q_i) e le $\dot{q}_i$ non sono considerate indipendenti dalle q_i, essendo le rispettive derivate temporali. Nelle equazioni di Hamilton invece le variabili indipendenti sono $2n$ (le q e le p) e le prime n equazioni

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \dots n$$

servono appunto a stabilire un legame tra le p e le $\dot{q}$ (in pratica riducendo ad n le variabili indipendenti). Da un punto di vista matematico si può notare che si è passato da n equazioni di Lagrange del secondo ordine in n variabili indipendenti a $2n$ equazioni (di Hamilton) del primo ordine in $2n$ variabili indipendenti. Uno dei vantaggi maggiori derivanti dall'uso di $2n$ variabili indipendenti è in effetti quello di permettere trasformazioni di variabili assai più generali che non per le coordinate lagrangiane. Di questo ci occuperemo nel prossimo capitolo.

Esercizio 9. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su di un'asta orizzontale ruotante con velocità angolare ω costante attorno ad un asse verticale. Il punto è inoltre legato con una forza elastica al centro O di rotazione dell'asta. Studiamone il moto. La lagrangiana è



$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) - \frac{1}{2} k r^2$$

Inoltre si ha

$$p_r = m\dot{r}$$

$$H = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2 - \frac{1}{2} m r^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2} k r^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$= T + V - m r^2 \omega^2$$

Le equazioni di Hamilton danno

$$m\ddot{r} = -kr + mr\omega^2 = -(k - m\omega^2)\, r$$

e pertanto il moto è armonico di frequenza $\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$ se $k - \omega^2 m$ oppure è un moto esponenziale:

$$r \propto A e^{\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t} + B e^{-\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t}$$

se $k - \omega^2 m < 0$.

Anche in questo caso l'Hamiltoniana è una costante del moto

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Essa non coincide con l'energia del punto materiale. La differenza, $-mr^2\omega^2$, non è costante e pertanto l'energia del punto materiale non si conserva. In effetti, il motore che fa girare la asta compie un lavoro non nullo. Siccome il punto è vincolato a muoversi lungo l'asta, la reazione vincolare compie lavoro non nullo nel riferimento inerziale. In tale riferiemnto infatti la velocità del punto ha una componente non nulla nella direzione della reazione vincolare. Ciò è in accordo con le equazioni.

CAPITOLO IV

TRASFORMAZIONI CANONICHE

1. Cambiamento di coordinate lagrangiane

Il maggior vantaggio della formulazione lagrangiana è quello di dare alle equazioni della meccanica una forma indipendente dalle coordinate scelte per descrivere la configurazione del sistema. In effetti di tale vantaggio si è largamente usato per semplificare la formulazione e la soluzione dei problemi discussi nel Cap. II, scegliendo nei vari casi le coordinate più intrinseche al sistema in esame.
Il metodo seguito per ottenere la lagrangiana in termini delle coordinate lagrangiane q_i è stato quello di scrivere la lagrangiana in termini di coordinate cartesiane x_i, relative ad un riferimento inerziale $\mathcal{R}$

$$L = L(x_i, \dot{x}_i, t) \tag{4.1}$$

e di sostituire le x_i, $\dot{x}_i$ con le loro espressioni in termini delle q_i

$$x_i = x_i(q,t), \qquad \dot{x}_i = \dot{x}_i(q,\dot{q},t) \tag{4.2}$$

$$L(x_i(q,t), \dot{x}_i(q,\dot{q},t), t) \equiv L_q(q,\dot{q},t) \tag{4.3}$$

Tale procedimento fornisce ovviamente il metodo per fare un cambiamento di coordinate lagrangiane. Siano, ad esempio

$$Q_i = Q_i(q,t), \qquad q_i = q_i(Q,t) \tag{4.4}$$

le equazioni che legano le nuove coordinate Q alle vecchie q.
Il problema di fare un cambiamento di coordinate è essenzialmente quello di scrivere la lagrangiana per le coordinate Q. A questo scopo, basta sostituire nella $L_q(q,\dot{q},t)$ le funzioni $q_i(Q,t)$, $\dot{q}_i(Q,\dot{Q},t)$ ottenute dalle eq. (4).

$$L_Q(Q,\dot Q,t) \equiv L_q(q(Q,t),\dot q(Q,\dot Q,t),t)$$
$$= L_q(q,\dot q,t) \tag{4.5}$$

esattamente come si è fatto nel Cap. II, per il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate lagrangiane generiche.
E' importante notare che in genere la L_Q e la L_q sono due funzioni diverse dei loro argomenti Q, $\dot Q$, t e q, $\dot q$, t (si vedano gli esempi 1--4 discussi in seguito). La (4.5) dice solo che le due funzioni coincidono numericamente per valori corrispondenti degli argomenti. Più precisamente se $\bar q$, $\bar{\dot q}$ sono i valori corrispondenti a valori fissati $\bar Q$, $\bar{\dot Q}$ delle nuove coordinate, al tempo t,

$$\bar q = q(\bar Q,t), \qquad \bar{\dot q} = \dot q(\bar Q,\bar{\dot Q},t)$$

la lagrangiana L_q nel "punto" $\bar q$, $\bar{\dot q}$, t ha lo stesso valore della lagrangiana L_Q calcolata nel "punto" corrispondente $\bar Q$, $\bar{\dot Q}$, t. (Ciò non implica che L_Q ed L_q siano la stessa funzione dei loro argomenti!)
Nel caso particolare, in cui L_Q ed L_q sono la stessa funzione dei loro argomenti, la lagrangiana si dice invariante per la data trasformazione di coordinate. Come vedremo in seguito le proprietà di invarianza sono legate all'esistenza di costanti del moto.
Nota. Che la lagrangiana per le coordinate Q sia effettivamente quella definita dalla (4.5), è implicitamente dimostrata nel procedimento seguito. Infatti la trasformazione dalle q alle Q può essere vista anche come una trasformazione dalle x alle Q tramite le q:

$$x_i = x_i(q,t) = x_i(q(Q,t),t) = \tilde x_i(Q,t)$$

Pertanto si ha

$$L_Q(Q,\dot Q,t) = L_x(x(q(Q,t),t),\dot x(q(Q,t),\dot q(Q,\dot Q,t),t)$$
$$= L_q(q(Q,t),\dot q(Q,\dot Q,t),t)$$

cioè la (4.5).

In effetti, si può verificare direttamente che la L_Q è la lagrangiana per le coordinate Q, cioè che valgono per la L_Q e equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L_Q}{\partial Q_i} = 0$$

Infatti dalla (4.5) si ha

$$\frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

$$\frac{\partial L_Q}{\partial Q_i} = \frac{\partial L_q}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial L_q}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L_Q}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_q}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = 0$$

dato che per L_q valgono le equazioni di Lagrange.

Esempio 1. Studiamo la deviazione dei gravi verso Est. Per concretezza consideriamo la caduta di un grave di massa m all'equatore, dall'altezza h e determiniamo di quanto ha deviato dalla verticale quando tocca etrra, come effetto della rotazione terrestre.

Data la simmetria del problema conviene scegliere coordinate cilindriche (ρ, φ, z) con l'asse z diretto come l'asse di rotazione terrestre. In un sistema inerziale, la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - mg(\rho - R)$$

(R essendo il raggio terrestre). Rispetto ad un sistema solidale alla terra conviene introdurre le nuove coordinate

$$\rho' = \rho \quad , \qquad \varphi' = \varphi - \omega t$$

La lagrangiana nelle nuove coordinate si trova facilmente usando la (4.5)

$$L' = \frac{1}{2} m\left(\dot\rho'^2 + \rho'^2(\dot\varphi'+\omega)^2\right) - mg(\rho'-R)$$

E' ovvio notare che la lagrangiana non è invariante per la trasformazione di coordinate considerata. Le equazioni di Lagrange sono le seguenti

$$\ddot\rho' = -g + \rho'(\dot\varphi'+\omega)^2, \qquad \rho'^2(\dot\varphi'+\omega) = K = \text{costante}$$

La costante K è determinata dalle condizioni iniziali. Se al tempo t=0, $\rho'=\rho_0$ e $\varphi'(0) = 0$, si ha $k = \rho_0^2\omega$. Pertanto la prima equazione di Lagrange diviene

$$\ddot\rho' = -g + \frac{\omega^2\rho_0^4}{\rho'^3}$$

Ricordando che $\omega = 7{,}3\times 10^{-5}\ \text{rad}/\text{sec}$, non è difficile riconoscere che $g \gg \omega^2\rho_0^4/\rho^3$, e quindi in prima approssimazione si ha

$$\rho' \simeq \rho_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

La seconda equazione di Lagrange dà allora

$$\dot\varphi' = \omega\left(-1 + \frac{\rho_0^2}{\rho'^2}\right) \sim \omega\left(-1 + 1 - 2\,\frac{\rho'-\rho_0}{\rho_0} + \cdot\right)$$

$$\sim -\frac{2\omega}{\rho_0}(\rho'-\rho_0) = \frac{\omega g}{\rho_0} t^2$$

In conclusione

$$\varphi' = \frac{1}{3}\frac{\omega g}{\rho_0} t^3 \simeq \frac{1}{3}\frac{\omega g}{\rho_0}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

La deviazione è dunque verso Est ($\varphi' > 0$). La distanza dalla verticale è con buona approssimazione

$$\rho_0\varphi' = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

Più complicata sarebbe stata la soluzione e soprattutto la discussione delle approssimazioni usando le coordinate ρ , φ , o le coordinate cartesiane.

<u>Esempio 2</u>. Vediamo come varia il piano di oscillazione di un pendolo come effetto della rotazione terrestre (<u>pendolo di Foncault</u>).

In coordinate polari (riferite ad un sistema inerziale con centro il centro della terra e asse z diretto come l'asse terrestre) l'energia cinetica del pendolo è

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2\right)$$

In coordinate polari riferite ad un sistema solidale alla terra $\rho' = \rho$, $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \omega t$ l'energia cinetica si scrive nella forma seguente

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot\rho'^2 + \rho'^2 \dot\theta'^2 + \rho'^2 \sin^2\theta' (\dot\varphi' + \omega)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot\rho'^2 + \rho'^2 \dot\theta'^2 + \rho'^2 \sin^2\theta'\, \dot\varphi'^2\right) + L_z \omega + \frac{1}{2} m \rho'^2 \sin^2\theta'\, \omega^2$$

ω è la velocità angolare di rotazione terrestre e L_z la componente del momento angolare rispetto all'asse z. Se si trascurano termini in ω^2, dato che ω è molto piccola, si ha

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot\rho'^2 + \rho'^2 \dot\theta'^2 + \rho^2 \sin^2\theta'\, \dot\varphi'^2\right) + \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

La lagrangiana non è pertanto invariante sotto la trasformazione $\rho, \theta, \varphi \to \rho', \theta', \varphi'$.

<u>L'effetto di studiare il moto in un sistema ruotante è quello di aggiungere il termine $\vec{L} \cdot \vec{\omega}$</u>. E' proprio la presenza di questo termine che rende l'energia cinetica non invariante rispetto alla trasformazione considerata.

E' facile ora studiare il moto del pendolo nell'approssimazione in cui si trascurano gli spostamenti verticali e si considera il moto in un piano orizzontale x', y' (l'asse z' è diretto come la verticale). Il coordinate polari piane r, α, si ha (a meno di termini in ω^2)

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\alpha^2\right) + \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\dot r^2 + r^2 (\dot\alpha + \omega_{z'})^2\right)^{*}$$

D'altra parte l'effetto del potenziale gravitazionale e della reazione vincolare <u>nell'approssimazione in cui si trascurano</u>

gli spostamenti verticali, è equivalente a quello di un potenziale armonico $V = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) = \frac{1}{2}kr^2$. La lagrangiana diviene pertanto

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\alpha} + \omega_{z'})^2\right) - \frac{1}{2} k r^2$$

Essa coincide con la lagrangiana di un oscillatore armonico bidimensionale scritta in termini di coordinate polari relative ad un sistema ruotante attorno all'asse z' con velocità angolare $\omega_{z'}$. La soluzione è ora immediata. Se

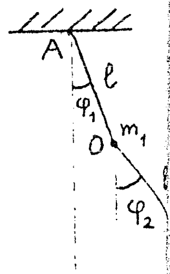
$$r_0 = r_0(t)\,, \qquad \alpha_0 = \alpha_0(t)$$

è la soluzione delle equazioni del moto quando $\omega_{z'} = 0$, la soluzione quando $\omega_{z'} \neq 0$ è data da

$$r = r_0(t)\,, \qquad \alpha = \alpha_0(t) - \omega_{z'} t$$

Il piano di oscillazione del pendolo ruota dunque con velocità angolare $\omega_{z'}$. Chiaramente all'equatore $\omega_{z'} = 0$ e non c'è alcun effetto, al polo invece si ha $\omega_{z'} = \omega$ e il piano di oscillazione ruota con la velocità angolare terrestre, come è ovvio.
E' interessante notare come la possibilità di fare trasformazioni di coordinate nella lagrangiana, invece di studiare direttamente le equazioni del moto, abbia notevolmente semplificato la soluzione.

Esempio 3. Vediamo come si semplifica lo studio del doppio pendolo mediante trasformazioni di coordinate lagrangiane.
Due aste di massa trascurabile e lunghezza l sono incernierate in O, mentre l'estremo A di una di esse (v. figura) e sospeso in A.



Nei punti O e . si trovano due punti materiali di massa m_1 e m_2

rispettivamente. Il sistema può oscillare in un piano verticale. Nell'approssimazione di piccole oscillazioni $\varphi_1 \ll 1$, $\varphi_2 \ll 1$, la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,\ell^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\ell^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,g\,\ell\,\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2\,g\,\ell\,\varphi_2^2 .$$

Per semplificare la forma di tale lagrangiana cominciamo con fare il seguente cambiamento di coordinate lagrangiane

$$q_1 = \sqrt{m_1+m_2}\;\ell\varphi_1 , \qquad q_2 = \sqrt{m_2}\;\ell\varphi_2$$

Si ha allora

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\;\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\,\frac{g}{\ell}\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

Tale lagrangiana differisce dalla lagrangiana di un oscillatore armonico bidimensionale di massa m=1, e costante elastica $k = \frac{g}{l}$, per il termine $\sqrt{m_2/(m_1+m_2)}\;\dot{q}_1\dot{q}_2$. Esso può essere eliminato facendo la seguente trasformazione di coordinate lagrangiane

$$q_1 = \frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{2}} , \qquad q_2 = \frac{Q_1-Q_2}{\sqrt{2}}$$

Si ha infatti

$$L_Q = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2\right) + \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\;\frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 - \dot{Q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\,\frac{g}{\ell}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu_1\dot{Q}_1^2 + \mu_2\dot{Q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\,\frac{g}{\ell}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right)$$

dove

$$\mu_1 = 1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} , \qquad \mu_2 = 1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} .$$

La lagrangiana L_Q corrisponde alla lagrangiana di due o-scillatori armonici indipendenti di massa μ_1 e μ_2 rispettivamente e costante elastica $k = g/l$. La soluzione è immediata

$$Q_1 = \mathrm{Re}\left(A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t}\right)$$

$$Q_2 = \mathrm{Re}\left(A_2 e^{i\omega_2 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t}\right)$$

con $\omega_1^2 = \dfrac{g}{l\mu_1}$, $\omega_2^2 = \dfrac{g}{l\mu_2}$

Esempio 4. Alla luce delle considerazioni fatte in questo capitolo si veda la discussione del teorema di armor fatto al Cap. II. Soprattutto, si noti come anche in quel caso, la possibilità di fare una trasformazione di coordinate nella lagrangiana abbia notevolmente semplificato la discussione del problema.

2. Trasformazioni di coordinate ed equazioni di Hamilton

Si è visto nel paragrafo precedente come si trasforma la lagrangiana per cambiamento di coordinate lagrangiane. Siccome in molti casi (v.Cap.III) la formulazione Hamiltoniana è più conveniente, è naturale chiedersi come si trasforma l'Ham niana e le corrispondenti equazioni per cambiamento di coordinate lagrangiane. La risposta si ottiene facilmente ricordando le definizioni date al Cap. III. e $Q_i = Q_i(q,t)$ sono le nuove coordinate, i rispettivi momenti coniugati P_i sono dati da

$$P_i \equiv \frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L_q(q(Q,t),\, \dot{q}(Q,\dot{Q},t),t)}{\partial \dot{Q}_i} =$$

$$= \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \tag{4.6}$$

e l'Hamitoniana è

$$H_{Q,P}(Q,P) = P_i \dot{Q}_i - L_Q \tag{4.6'}$$

Pertanto in generale

$$H_{Q,P}(Q,P) \neq H_{q,p}(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) \tag{4.6''}$$

A differenza della lagrangiana, la Hamiltiana non è covariante per cambiamento di coordinate lagrangiane: cioè, l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate Q, P non si ottiene sostituendo nella H(q,p,t) le funzioni q(Q,t), p(Q,P,t) come avevamo fatto per la lagragiana. Questo risultato traduce un'importante proprietà fisica: l'energia di un sistema meccanico non è covariante per cambiamento di coordinate.

Esempio 5. Consideriamo un punto materiale soggetto ad un potenziale V. Per semplicità consideriamo il problema ad una sola dimensione. La lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V \quad ;$$

e l'Hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V = \frac{p_x^2}{2m} + V$$

Facciamo ora il cambiamento di coordinate

$$x' = x - vt$$

Si ottiene

$$L_{x'} = \frac{1}{2} m (\dot{x}'+v)^2 - V = L_x(x(x',t), \dot{x}(x',\dot{x}',t),t)$$

Si ha invece

$$H_{x'} = m(\dot{x}'+v)\dot{x}' - \frac{1}{2} m (\dot{x}'+v)^2 + V$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}'^2 + V - \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}'+v)^2 + V - m(\dot{x}'+v)v$$

$$= H_x - m(\dot{x}'+v)v$$

L'Hamiltoniana non è dunque covariante come la lagrangiana. Ciò traduce il fatto fisico che l'energia di un punto materiale cambia se si passa ad un riferimento in moto uniforme. In termini delle variabili canoniche x', $p_{x'} = m(\dot{x}'+v) = p_x$, si ha

$$H_{x'} = \frac{p_{x'}^2}{2m} + V - p_{x'}v \neq H_x = \frac{p_x^2}{2m} + V, \qquad p_x = p_{x'}.$$

—— . ——

<u>Esempio 6</u>. Vediamo come si trasforma l'Hamiltoniana di un punto materiale soggetto al potenziale V nel passaggio ad un sistema ruotante attorno ad un asse fisso con velocità angolare costante ω .

La simmetria della trasformazione suggerisce di prendere coordinate cilindriche, con l'asse z diretto come l'asse di rotazione del sistema di coordinate. La trasformazione di coordinate è la seguente

$$\rho' = \rho, \qquad \varphi' = \varphi - \omega t, \qquad z' = z$$

La lagragiana nelle nuove coordinate si ottiene facilmente

$$L' = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}'^2 + \rho'^2(\dot{\varphi}'+\omega)^2 + \dot{z}'^2) - V$$

Pertanto si ha

$$p_{\rho'} = m\dot{\rho}' = p_\rho \,, \qquad p_{z'} = m\dot{z}' = p_z \,, \quad p_{\varphi'} = m\rho^2(\dot{\varphi}' + \omega) = p_\varphi$$

in accordo con la (4.6).

L'Hamiltoniana nelle coordinate ρ, φ, z è

$$H = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + V = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) + V$$

L'Hamiltoniana nelle coordinate ρ', φ', z' è invece

$$H_{\rho',\varphi',z'} = \frac{1}{2m}\left(p_{\rho'}^2 + p_{z'}^2 + \frac{p_{\varphi'}^2}{\rho'^2}\right) + V - p_{\varphi'}\,\omega \neq H$$

Nel passaggio ad un sistema ruotante con velocità angolare ,
l'Hamiltoniana cambia per il termine

$$p_{\varphi'}\,\omega = \vec{L} \cdot \vec{\omega} \,,$$

$\vec{L}$ essendo il momento angolare.

<u>Esempio 7.</u> Rivediamo il teorema di Larmor discusso nel Cap. II.
La lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - m\rho^2\omega_L\dot{\varphi} - V(\rho, z) \,, \qquad \omega_L = -\frac{eH}{2mc}$$

e l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + p_z^2) + \frac{(p_\varphi + m\rho^2\omega_L)^2}{2m\rho^2} + V(\rho, z)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) + p_\varphi\omega_L + \frac{1}{2} m\rho^2\omega_L^2 + V(\rho, z)$$

Essa differisce dall'Hamiltoniana di un punto materiale soggetto al potenziale V per i termini $p_\varphi\omega_L$ e $\frac{1}{2} m\rho^2\omega_L^2$. Il primo può essere eliminato mediante una trasformazione di coordinate

$$\rho' = \rho \,, \qquad z' = z \,, \quad \varphi' = \varphi - \omega_L t \;; \quad p_{\rho'} = p_\rho \,, \quad p_{\varphi'} = m\rho^2\dot{\varphi}' = p_\varphi \,, \quad p_{z'} = p_z$$

Si ha infatti

$$L_{q'} = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}'^2 + \dot{z}'^2 + \rho'^2\dot{\varphi}'^2) - V - \frac{1}{2} m\rho'^2\omega_L^2$$

e

$$H_{q'} = \frac{1}{2m}\left(p_{\rho'}^2 + p_{z'}^2 + \frac{p_{\varphi'}^2}{\rho'^2}\right) + V + \frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L^2$$

$$\neq H_q = \frac{1}{2m}\left(p_{\rho'}^2 + p_{z'}^2 + \frac{p_{\varphi'}^2}{\rho'^2}\right) + V + \frac{1}{2} m \rho'^2 \omega_L^2 + p_{\varphi'} \omega_L$$

La differenza tra $H_{q'}$ e H_q è data dal termine $p_{\varphi'} \omega_L$.

3. Trasformazioni di coordinate canoniche

Nella formulazione Hamiltoniana le coordinate canoniche q, p sono da considerare come coordinate indipendenti (v. Cap. III), sullo stesso piano. Pertanto oltre alle trasformazioni di coordinate lagrangiane discusse nei paragrafi precedenti la formulazione Hamiltoniana permette di considerare trasformazioni più generali, del tipo

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \,, \qquad P_i = P_i(q,p,t) \,. \tag{4.7}$$

Come vedremo negli esempi che discuteremo in seguito, la possibilià di fare trasformazioni del tipo (4.7) permetterà di semplificare notevolmente la soluzione di alcuni problemi. Per ora ci occuperemo del problema di vedere quali condizioni devono soddisfare le (4.7) perchè siano trasformazioni accettabili. Una trasformazione (4.7) è accettabile o, meglio, canonica se esiste una funzione Hamiltoniana K(Q,P) delle nuove variabili Q, P e per essa valgono le equazioni hamiltoniane

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \,, \qquad \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} \,. \tag{4.8}$$

Che le trasformaeioni (4.7) non possano essere assegnate in maniera totalmente arbitraria può vedersi anche dalla discussione fatta al paragrafo 2, dove si sono considerate trasformazioni del tipo

$$Q_i = Q_i(q,t) \tag{4.9}$$

In questo caso particolare delle (4.7) le P_i non possono essere funzioni arbitrarie delle q, p: la condizione che esista una funzione Hamiltoniana K(Q,P) e valgano per le Q, P le equazioni di

Hamilton, determina univocamente le funzioni $P_i = P_i(q,p,t)$ mediante le (4.6)

$$P_i = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = p_j \frac{\partial q_j(Q,t)}{\partial Q_i} \tag{4.6}$$

Dunque per trasformazioni del tipo (4.9), le P devono essere particolari funzioni lineari delle vecchie p. Si noti che le (4.6), (4.9) definiscono una trasformazione canonica senza fare riferimento ad una data Hamiltoniana.

Occupiamoci ora del caso generale (4.7). Una trasformazione di coordinate canoniche è caratterizzata dalle relazioni che intercorrono tra le vecchie e le nuove coordinate, ad es.,

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \;, \qquad P_i = P_i(q,p,t) \tag{4.10}$$

o, equivalentemente,

$$q_i = q_i(Q,P,t) \;, \qquad p_i = p_i(Q,P,t), \quad i=1, \; n \tag{4.11}$$

(in entrambi i casi i secondi membri sono funzioni assegnate). In effetti per caratterizzare la trasformazione basta dare 2n relazioni invertibili tra le nuove e le vecchie coordinate. Ad esempio la trasformazione può essere caratterizzata da relazioni invertibili del tipo

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} p_i &= p_i(q,Q,t) && (4.12) \\ P_i &= P_i(q,Q,t) \qquad i=1,\dots n && (4.12') \end{aligned}$$

Infatti invertendo le (4.12') si possono ottenere le q in funzione delle Q, P

$$q_i = q_i(Q,P,t)$$

e sostituendo queste nelle (4.12) si ottengono le p in funzione delle Q, P,

$$p_i = p_i(Q,P,t)$$

Le (4.12), (4.12') sono pertanto equivalenti alle (4.11)

In maniera analoga, si può facilmente vedere che la trasformazione può essere caratterizzata in uno dei tre modi seguenti

$$\text{II)} \quad p_i = p_i(q, P, t), \quad Q_i = Q_i(q, P, t) \tag{4.13}$$

$$\text{III)} \quad q_i = q_i(p, Q, t), \quad P_i = P_i(p, Q, t) \tag{4.14}$$

$$\text{IV)} \quad q_i = q_i(p, P, t), \quad Q_i = Q_i(p, P, t) \tag{4.15}$$

(i=1 ...... n).

Per enunciare le condizioni di canonicità, conviene scrivere la trasformazione in una delle quattro forme date sopra: (4.12), (4.13), (4.14), (4.15).

Per concretezza supponiamo di aver scelto la forma (4.12). In tal caso, la trasformazione è canonica se e solo se esiste una funzione F_I

$$F_I = F_I(q, Q, t) \tag{4.16}$$

tale che le funzioni a secondo membro delle (4.12), si ottengono come derivate parziali della F_I

$$p_i = \frac{\partial F_I(q, Q, t)}{\partial q_i} \tag{4.17}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_I(q, Q, t)}{\partial Q_i} \tag{4.17'}$$

La funzione F_I permette anche di scrivere la nuova Hamiltoniana $K(Q, P)$

$$K(Q, P, t) = H(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F_I}{\partial t} \tag{4.18}$$

La funzione F_I è detta funzione generatrice della trasformazione canonica. Equivalentemente, la trasformazione è canonica se esiste una funzione

$$F_{II} = F_{II}(q, P, t) \tag{4.19}$$

oppure

$$F_{III} = F_{III}(p, Q, t) \tag{4.20}$$

oppure

$$F_{IV} = F_{IV}(p, P, t) \tag{4.21}$$

tale che si abbia rispettivamente

$$\text{II)} \qquad p_i = \frac{\partial F_{II}}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_{II}}{\partial P_i}, \tag{4.22}$$

$$\text{III)} \qquad q_i = -\frac{\partial F_{III}}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_{III}}{\partial Q_i}, \tag{4.23}$$

$$\text{IV)} \qquad q_i = -\frac{\partial F_{IV}}{\partial p_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_{IV}}{\partial P_i}. \tag{4.24}$$

Come nel caso I, la nuova Hamiltoniana è data rispettivamente da

$$K = H + \partial F_{II}/\partial t, \tag{4.22'}$$

$$K = H + \partial F_{III}/\partial t, \tag{4.23'}$$

$$K = H + \partial F_{IV}/\partial t. \tag{4.24'}$$

Per la dimostrazione delle condizioni di canonicità (4.17), (4.22), (4.23), (4.24) rimandiamo ad un qualsiasi libro di meccanica analitica (si veda ad esempio J.W. Leech, Classical Mechanics, Methuen, e E. Fabri, Meccanica Analitica, Pellegrini). Vediamo invece di commentare le equazioni ottenute.

Innanzitutto ci preme far notare che una trasformazione $q, p \rightarrow Q, P$ è canonica <u>indipendentemente</u> da una data Hamiltoniana. Essa è dunque tale <u>per ogni</u> sistema descritto da 2n variabili canoniche q, p, comunque sia la sua Hamiltoniana. La canonicità di una trasformazione garantisce che comunque sia la $H(q,p,t)$, esiste una funzione Hamiltoniana $K(Q,P,t)$ delle nuove coordinate Q, P e per esse valgono le (4.8).

Inoltre è importante notare che l'Hamiltoniana è covariante cioè la nuova Hamiltoniana $K(Q,P,t)$ si ottiene dalla vecchia $H(q,p,t)$ sostituendo in essa le q e p in funzione delle Q, P, se e solo se le relazioni che legano le Q, P alle q, p non dipendono esplicitamente dal tempo. In tal caso infatti anche le funzioni F_I, ... F_{IV} non dipendono esplicitamente dal tempo e le (4.22'), (4.23'), (4.24) ci danno

$$K(Q,P,t) = H(q(Q,P,t),\ p(Q,P,t),\ t) \qquad (4.25)$$

Analogamente al caso lagrangiano discusso nel paragrafo 1, la (1.25) non implica che K e H siano la stessa funzione dei loro argomenti. In genere esse sono funzioni diverse. L'Hamiltoniana si dice invariante rispetto ad una trasformazione canonica $q, p \longrightarrow Q, P$ se K e H (v. eq. 4.25) sono la stessa funzione dei loro argomenti.

Esempio 7'. Esempi di trasformazioni canoniche rispetto alle quali l'Hamiltoniana non è invariante sono stati discussi nel paragrafo 2. Negli esempi 5, 6, 7 non vale nemmeno l'equazione (4.25) dato che in quei casi la trasformazione di coordinate dipende esplicitamente dal tempo. Non è difficile verificare che l'Hamiltoniana relativa alle nuove variabili Q, P è data dalle equazioni (4.10), (4.22'), (4.23'), (4.24'). In effetti le generatrici delle trasformazioni studiate negli esempi 5, 6, 7 sono rispettivamente

$$F = (x - vt)\, p_{x'} = x\, p_{x'} - vt\, p_{x'} = x\, p_x - vt\, p_x \quad ,$$

$$F = \rho\, p_{\rho'} + z\, p_{z'} + \varphi\, p_{\varphi'} - \omega t\, p_{\varphi'} \quad ,$$

$$F = \rho\, p_{\rho'} + z\, p_{z'} + \varphi\, p_{\varphi'} - \omega_L t\, p_{\varphi'} \quad .$$

Esse dipendono esplicitamente dal tempo e nei vari casi la differenza fra K e H è data dalla derivata parziale della funzione generatrice rispetto al tempo.

Esempio 8. Verifichiamo che l'Hamiltoniana di un punto materiale soggetto a potenziale centrale è invariante per rotazioni infinitesime. Ci limitiamo a verificarlo per rotazioni infinitesime attorno all'asse z

$$x' = x - \alpha y \;, \qquad y' = y + \alpha x \;, \qquad z' = z \;,$$

$$p_{x'} = p_x + \alpha p_y \;, \qquad p_{y'} = p_y - \alpha p_x \;, \qquad p_{z'} = p_z \;.$$

Essendo la trasformazione indipendente dal tempo, si ha per la (4.25)

$$K(x', y', z', p_{x'}, p_{y'}, p_{z'}) = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r) = \frac{1}{2m}(p_{x'}^2 + p_{y'}^2 + p_{z'}^2) + V(r')$$

K ed H sono dunque la stessa funzione dei loro argomenti, cioè l'Hamiltoniana è invariante per rotazioni.

Prima di concludere vogliamo notare che i problemi che si incontrano con le trasformazioni canoniche sono essenzialmente di due tipi:

a) Viene data la funzione generatrice e bisogna determinare la trasformazione canonica. In tal caso, ci riferiamo per concretezza al caso I, si ottengono per derivazione le eq. I e da questa si risale alle (4.11), come discusso precedentemente.

b) Data una trasformazione di coordinate si tratta di vedere se è canonica e in tal caso si deve trovare la nuova Hamiltoniana. Per risolvere tale problema occorre trovare la generatrice integrando uno dei sistemi di equazioni I, II, III, IV.

Vedremo su casi concreti come si affrontanò i due tipi di problemi a) e b).

Esempio 9. Determinare quale trasformazione canonica è generata dalla seguente funzione:

$$F = \sum_i q_i P_i \tag{4.26}$$

Dalle (4.22) si ha subito

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i , \qquad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i$$

La (4.26) genera pertanto la trasformazione identità.

Esempio 10. Determinare se la trasformazione

$$Q_i = -q_i \quad , \qquad P_i = - p_i \tag{4.27}$$

è canonica.

La forma delle (4.27) è facilmente riconducibile a quella delle trasformazioni (4.13) o (4.14). Fissiamo, per comodità, l'attenzione sulle (4.13). Nella forma (4.13), le (4.27) diventano

$$p_i = - P_i \quad , \qquad Q_i = - q_i$$

Per dimostrare che la (4.27) è canonica occorre trovare la funzione generatrice, cioè occorre trovare una funzione $F_{II}(q,P,t)$ tale che

$$p_i = \partial F_{II}(q,P,t)/\partial q_i = - P_i$$

$$Q_i = \frac{\partial F_{II}}{\partial P_i} = - q_i \tag{4.28}$$

Le (4.28 si integrano facilmente. La prima dà

$$F_{II}(q,P,t) = - \sum_i q_i P_i + f(P,t)$$

e la seconda implica

$$f(P,t) = \text{costante}$$

Pertanto, siccome le funzioni generatrici sono ovviamente determinate a meno di costanti, possiamo porre

$$F_{II}(q,P,t) = - \sum_i q_i P_i \tag{4.29}$$

Essa non dipende esplicitamente dal tempo e quindi si ha

$$K(Q,P,t) = H(q(Q),\, p(P),\, t) = H(-Q,-P,t) \tag{4.30}$$

Il significato fisico della (4.27) si vede facilmente se si considerano coordinate cartesiane. In tal caso si ha

$$x'_i = -x_i \quad , \qquad \dot{x}'_i = -\dot{x}_i$$

La trasformazione (4.27) corrisponde dunque ad una inversione degli assi (o Parità), ed è canonica.

Esempio 11. Verificare che la trasformazione

$$Q_i = p_i \quad , \qquad P_i = -q_i \tag{4.31}$$

è canonica. Essa corrisponde essenzialmente allo scambio delle q con le p, e la sua canonicità è una ulteriore conferma del fatto che nella formulazione Hamiltoniana le q e le p sono sullo stesso piano Una trasformazione canonica permette di scambiare le une con le altre.

Per verificare che la (4.31) è canonica dobbiamo trovare la funzione generatrice. Cominciamo col mettere la (4.31) in una delle forme I - IV. Ad esempio essa può essere messa facilmente nella forma (4.12)

$$p_i = Q_i \quad , \qquad P_i = -q_i \tag{4.32}$$

Si tratta ora di trovare una funzione $F(q,Q,t)$ tale che

$$p_i = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_i} = Q_i \quad , \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} = -q_i \tag{4.33}$$

Le (4.33 si integrano facilmente. La prima dà

$$F = \sum q_i Q_i + f(Q,t)$$

e la seconda dà

$$f(Q,t) = \text{costante}$$

Portanto possiamo porre

$$F = \sum_i q_i Q_i \tag{4.34}$$

29)

.30)

Esempio 12. Infine determiniamo la funzione generatrice delle trasformazioni (4.9), (4.6), che già sappiamo canoniche. Esse comprendono la vasta classe di trasformazioni in cui le nuove coordinate Q non dipendono dalle vecchie p. Di questo tipo sono tutte le trasformazioni viste nei Capitoli II, III (ad esempio il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari etc.).

Cominciamo col mettere le (4.9) (4.6) in una delle forme I-IV. Le più adatte sono le (4.13) o le (4.14). Scegliamo ad esempio la forma (4.13)

$$p_i = P_j \frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i} \quad , \qquad Q_i = Q_i(q,t) \tag{4.35}$$

(La prima delle (4.35) si ottiene invertendo la (4.6)). La funzione generatrice $F = F(q,P,t)$ si ottiene integrando le equazioni seguenti

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_j \frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i} \quad , \qquad Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = Q_i(q,t)$$

La prima dà

$$F = \sum Q_j(q,t) P_j + f(P,t)$$

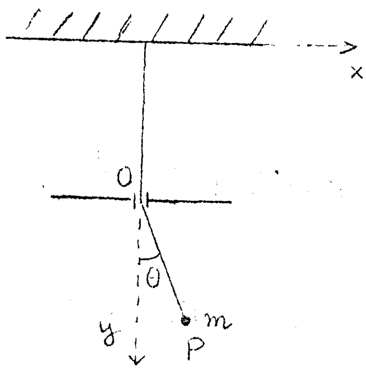
e la seconda implica

$$f(P,t) = \mathrm{cost}$$

In definitiva si ha

$$F = F(q,P,t) = \sum Q_j(q,t) P_j \tag{4.36}$$

Esempio 13. Consideriamo un pendolo costituito da un punto materiale di massa m appeso ad una cosra flessibile ed inestensibile di massa trascurabile appesa al soffitto (v. figura). Tale corda passa attraverso un buco in un piano orizzontale che può scorrere su due guide verticali rigide. Il piano viene abbassato con velocità costante v. Determinare il moto del pendolo nell'approssimazione di piccole oscillazioni.



Soluzione:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

Se L è la lunghezza della corda, indichiamo con $l = l(t) = l_0 - vt$ il tratto OP. Si ha

$$x = l \sin\theta , \qquad y = l\cos\theta + L - l$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2 l \dot{l} \sin\theta\, \dot{\theta} - 2\dot{l}^2 \cos\theta) + mg[l(\cos\theta - 1) + L]$$

Trascurando i termini costanti, che non contribuiscono alle equazioni del moto si può anche porre

$$L = \frac{1}{2} m (l^2\dot{\theta}^2 + 2 l \dot{l} \sin\theta\, \dot{\theta} - 2\dot{l}^2 \cos\theta) + mgl(\cos\theta - 1)$$

Si ha pertanto $(p_\theta = m l^2 \dot{\theta} + m l \dot{l} \sin\theta)$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - p_\theta \frac{\dot{l}}{l} \sin\theta + m\dot{l}^2 \left(\frac{\sin^2\theta}{2} + \cos\theta \right) - mgl(\cos\theta - 1)$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni, $\theta << 1$, si ha $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ e quindi

$$H \simeq \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{\dot{l}}{l} p_\theta \theta + \frac{1}{2} m \theta^2 g l$$

l'Hamiltoniana assume una forma più semplice se si introducono le nuove coordinate

$$p = p_\theta / l\sqrt{m} , \qquad q = l\sqrt{m}\, \theta$$

(la trasformazione è canonica!). Si ottiene infatti

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{g}{\ell} q^2\right) - \frac{\dot{\ell}}{\ell} pq + \frac{\partial F_{II}}{\partial t} ,$$

$$F_{II} = F_{II}(\theta, p) = \sqrt{m}\, \ell\, \theta\, p ,$$

$$\frac{\partial F_{II}}{\partial t} = \sqrt{m}\, \dot{\ell}\, \theta\, p = \frac{\dot{\ell}}{\ell} q p ,$$

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega_0^2 q^2\right) , \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} = \frac{g}{\ell_0 - vt}$$

4. Gruppi di trasformazioni. Trasformazioni infinitesime

Consideriamo una funzione generatrice dipendente da un parametro α

$$F = F(q, P, \alpha) \tag{4.37}$$

Al variare di α, essa genera una classe di trasformazioni canoniche. Particolarmente interessante è il caso di trasformazioni canoniche (dipendenti da un parametro) connesse con l'identità: per esse, cioè, esiste un valore di α, scelto per comodità come valore zero, tale che

$$F(q, P, \alpha = 0) = \sum q_i P_i \tag{4.38}$$

Sotto opportune ipotesi di continuità nel parametro α, la (4.37) può essere sviluppata in serie di potenze in α. Per piccoli valori di α, si ha al primo ordine in α

$$F \simeq F(q, P, \alpha = 0) + \alpha \frac{\partial F(q, P)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \dots$$

$$F \simeq \sum q_i P_i + \alpha G(q, P) \tag{4.39}$$

Al variare di α, $\alpha \ll 1$, la (4.39) genera trasformazioni infinitesime

$$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial P_i}$$

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad P_i = p_i - \alpha \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{4.40}$$

E' importante notare che non tutte le trasformazioni canoniche possono essere ottenute da funzioni generatrici del tipo (4.37), (4.38), fissando un valore per α.

Esempio 14. Le traslazioni nella direzione i-esima

$$Q_i = q_i + \alpha, \qquad Q_j = q_j, \qquad j \neq i \tag{4.41}$$

sono del tipo 4.37), (4.38). Infatti la loro generatrice è

$$F = \sum_j q_j P_j + \alpha P_i = \sum q_j P_j + \alpha p_i \tag{4.42}$$

Esempio 15. Le rotazioni euclidee attorno ad un asse, che per comodità possiamo scegliere come asse z, sono del tipo (4.37), (4.38). Ci limitiamo a vederlo per rotazioni infinitesime. In tal caso si ha

$$x' = x - \alpha y\,, \qquad y' = y + \alpha x\,, \qquad z' = z$$

$$P_x = p_x + \alpha p_y\,, \qquad P_y = p_y + \alpha p_x\,, \qquad P_z = p_z \tag{4.43}$$

e la generatrice è

$$\begin{aligned} F &= (x-\alpha y) P_x + (y+\alpha x) P_y + z P_z \\ &= x P_x + y P_y + z P_z + \alpha (x p_y - y p_x) \end{aligned} \tag{4.44}$$

— . —

CAPITOLO V

PARENTESI DI POISSON

1. Costanti del moto e parentesi di Poisson

Abbiamo visto precedentemente come sia spesso conveniente trattare un problema di meccanica nella formulazione Lagrangiana o Hamiltoniana, descrivendo cioè l'evoluzione temporale del sistema fisico in esame mediante le coordinate canoniche q, p. Vediamo ora come si traducono in tale formulazione, i fatti fisici espressi dai teoremi di conservazione.

Lo stato di un sistema fisico ad un dato istante è completamente caratterizzato dalla sua configurazione (q) e dal suo atto di moto (p). Pertanto una qualunque grandezza fisica relativa al sistema, al tempo t, è completamente determinata dal valore delle q e p cioè è una funzione di q, p, t: ($F(q, p, t)$. Si noti che tale espressione indica che in generale può esserci una dipendenza esplicita dal tempo: ciò significa che istante per istante la grandezza fisica in esame è descritta da una funzione diversa della configurazione (q) e dell'atto di moto del sistema (p).

Esempio 1. Si consideri il Problema 1' del Cap. II, in cui la velocità angolare ω sia una funzione assegnata del tempo, ad esempio

$$\dot{\alpha} = \omega = A \sin \omega t$$

L'energia cinetica T, rispetto al riferimento inerziale $\mathcal{R}$, in termini delle coordinate canoniche $q=\theta$, $p=mr^2\dot{\theta}$, si scrive nella forma seguente

$$T = \frac{1}{2} m r^2 A^2 \sin^2 \omega t \cos^2 q + \frac{p^2}{2mr^2}$$

cioè è una funzione che dipende da q, p ed esplicitamente dal tempo.

In linea di principio per determinare se la $F(q,p,t)$ è una costante del moto occorrerebbe conoscere le soluzioni delle equazioni di Hamilton $q=q(t)$, $p=p(t)$, sostituire tali soluzioni nella F

e verificare se tale funzione non dipende più dal tempo. Perchè ciò avvenga occorre che la dipendenza temporale di q, p e la dipendenza esplicita della F dal tempo si compensino esattamente. Più precisamente occorre che sia

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{6.2}$$

Tale verifica diretta è operativamente impossibile. Essa è inoltre poco pratica perchè la ricerca delle costanti del moto è utile soprattutto per individuare le caratteristiche generali del moto prima di risolvere le equazioni stesse del moto. Come vedremo l'uso delle parentesi di Poisson permette di verificare facilmente se una grandezza fisica è una costante del moto dalla sola conoscenza della Hamiltoniana.

Cominciamo con notare che la (6.2) si può scrivere, usando le equazioni di Hamilton, nella forma seguente

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.3}$$

e definiamo come parentesi di Poisson di F e H, che indicheremo con $\{F, H\}$ l'espressione seguente

$$\{F, H\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \tag{6.4}$$

Pertanto la (6.2) si può scrivere nella forma seguente

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{6.5}$$

E' facile vedere che in questo modo il calcolo della derivata totale è ricondotto a delle derivate parziali della F e della Hamiltoniana, senza dover risolvere l'equazioni del moto. In particolare se la F non dipende esplicitamente dal tempo, essa è una costante del moto se e solo se la sua parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana è nulla.

Esempio 2. Considieriamo il caso di un punto materiale soggetto ad un potenziale $V = -p_\varphi^2/2m\rho^2$ (in coordinate cilindriche). Ciò equivale a descrivere il moto di un punto in un riferimento che ruoti attorno all'asse z con velocità angolare istantanea $\dot\varphi$, φ essendo la coordinata angolare del punto in un sistema inerziale. Ricordiamo che le coordinate cilindriche ρ, φ, z sono definite dalle relazioni seguenti

$$x = \rho\cos\varphi \,, \qquad y = \rho\sin\varphi \,, \qquad z = z$$

e p_φ è il momento coniugato a φ. Non è difficile trovare la Hamiltoniana di tale sistema fisico

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \,, \qquad p_\rho = m\dot\rho\,,\ p_z = m\dot z\,,\ p_\varphi = m\rho^2\dot\varphi$$

Ci si può domandare ora se la componente x del momento angolare

$$L_x = p_z\rho\sin\varphi - p_\rho z\sin\varphi - \frac{p_\varphi}{\rho} z\cos\varphi$$

è una costante del moto. L'uso delle parentesi di Poisson dà una risposta immediata

$$\frac{dL_x}{dt} = \{L_x, H\} = \frac{\partial L_x}{\partial \rho}\frac{\partial H}{\partial p_\rho} + \frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}(z p_\rho - p_z\rho)\cos\varphi$$

D'altra parte, $p_\varphi = m\rho^2\dot\varphi$ e dalle equazioni di Hamilton si ha

$$\dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = 0 \,,$$

per cui si ottiene

$$\frac{dL_x}{dt} = 0 .$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere per via un po' più lunga risolvendo le equazioni di Hamilton:

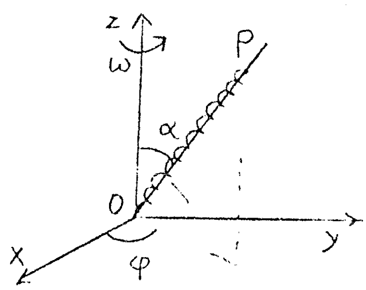
$$\dot p_\rho = \dot p_z = \dot p_\varphi = 0 \,, \qquad \dot\rho = p_\rho/m \,, \quad \dot\varphi = 0 \,, \quad \dot z = p_z/m$$

e sostituendo le soluzioni

$$\rho = \frac{p_\rho}{m}t + \mathrm{cost} \,, \qquad \varphi = \mathrm{cost} \,, \qquad z = \frac{p_z}{m}t + \mathrm{cost}$$

nella espressione per L_x .

Esercizio 3. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi lungo una sbarra di massa trascurabile. Questa ultima forma un angolo α con la verticale e ruota attorno ad essa con velocità angolare ω costante. Inoltre il punto materiale è soggetto ad una forza elastica di costante elastica K diretta verso il punto O (v. figura).



Essendo assegnato il moto di rotazione, il sistema ha un solo grado di libertà. La coordinata lagrangiana più adatta è la distanza $r = OP$. Si ottiene facilmente

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha \, \omega^2 \right) - \frac{1}{2} k r^2 - m g r \cos\alpha$$

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2 + m g r \cos\alpha - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\alpha \, \omega^2$$

$$= T + V - m r^2 \omega^2 \sin^2\alpha$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2} k r^2 + m g r \cos\alpha - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\alpha \, \omega^2$$

Le equazioni di Hamilton sono le seguenti

$$\dot{r} = p_r / m , \qquad \dot{p}_r = m \ddot{r} = \left(m \sin^2\alpha \, \omega^2 - k \right) r - m g \cos\alpha$$

La soluzione è

$$r = \mathrm{Re} \left(A e^{i\lambda t} + B e^{-i\lambda t} \right) - \frac{g \cos\alpha}{\Omega^2}$$

dove

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha , \qquad \lambda = \sqrt{\Omega^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha}$$

Il moto è limitato o no a seconda che $\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha \gtrless 0$.

Siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente da t, l'Hamiltoniana è una costante del moto. Possiamo verificare con le parentesi di Poisson che l'energia del punto materiale rispetto al riferimento inerziale $\mathcal{R}$

$$E_{\mathcal{R}} = T + V$$

non è una costante del moto. In effetti

$$\frac{dE_{\mathcal{R}}}{dt} = \{E_{\mathcal{R}}, H\} = \{T+V, -mr^2\omega^2 \sin^2\alpha\}$$
$$= 2mr\dot{r}\,\omega^2 \sin^2\alpha$$

E' invece una costante del moto l'energia del punto materiale rispetto al riferimento non inerziale $\mathcal{R}'$ solidale all'asta ruotante, definita nel modo seguente

$$E_{\mathcal{R}'} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^2 + mgr\cos\alpha - \frac{1}{2}mr^2\sin^2\alpha\,\omega^2$$

(si noti la presenza del potenziale centrifugo $V_c = -\frac{1}{2}mr^2\sin^2\alpha\,\omega^2$)

Analogamente, si verifica che la componente z del momento angolare $L_z = mr^2\sin^2\alpha\,\omega$ non è una costante del moto

$$\frac{dL_z}{dt} = \{L_z, H\} = 2mr\dot{r}\sin^2\alpha\,\omega$$

Il problema sarebbe stato diverso se non si fosse assegnato il moto di rotazione dell'asta e si fosse considerato isolato il sistema. In tale caso i gradi di libertà sono due e possibili coordinate lagrangiane sono $r = OP$, e l'angolo φ formato dal piano OPz rispetto all'asse x. In tal caso

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}kr^2 - mgr\cos\alpha$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\alpha}\right) + \frac{1}{2}kr^2 + mgr\cos\alpha = T + V$$

La ciclicità di φ implica che il momento angolare si conserva

$$p_\varphi = L_z = mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi} = \text{cost}$$

Anche l'energia $E = T+V$ è una costante del moto

$$\frac{dE}{dt} = \{E, H\} = 0$$

--- . ---

Vediamo ora alcuni casi particolari della (6.5). Prendiamo come funzione F la funzione $F(q,p,t) = q$ opp. $F(q,p,t) = p$. Tali funzioni non dipendono esplicitamente dal tempo, ma vi dipendono solo tramite le q,p. Abbiamo pertanto

$$\frac{dq}{dt} = \{q, H\} , \qquad \frac{dp}{dt} = \{p, H\} \tag{6.6}$$

E' questo un modo diverso di scrivere le equazioni di Hamilton a cui sono ovviamente equivalenti, come è facile vedere esplicitando le parentesi di Poisson.
Un altro caso interessante è ottenuto prendendo per F l'Hamiltoniana stessa. Le (6.5) danno

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.7}$$

equazione già ottenuta precedentemente.

2. Parentesi di Poisson

Abbiamo visto nel § precedente, e in particolare negli esempi, l'utilità delle parentesi di Poisson nel determinare le costanti del moto. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo di un'altra notevolissima proprietà delle parentesi di Poisson, e cioè la possibilità di caratterizzare le trasformazioni canoniche.
Le parentesi di Poisson permettono infatti di decidere se una trasformazione è canonica senza dover ricorrere all'integrazione delle equazioni (4.17) (4.22)-(4.24)
In vista di ciò e per l'importanza e utilità che via via riconosceremo alle parentesi di Poisson, dedicheremo questo paragrafo allo studio di alcune proprietà elementari delle parentesi di Poisson. Cominciamo col definire la parentesi di Poisson tra due grandezze fisiche $A(q,p,t)$ e $B(q,p,t)$

$$\{A,B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \qquad (6.8)$$

in accordo con la equazione (6.4), che ne rappresenta un caso particolare. Molto importanti per il seguito e soprattutto per le applicazioni alla Meccanica Statistica e gli sviluppi della Meccanica Quantistica sono le parentesi di Poisson tra le q e le p. Consideriamo cioè i seguenti casi i) $A=q_i$, $B=q_k$, ii) $A=q_i$, $B=p_k$; iii) $A=p_i$, $B=p_k$. Si ottiene facilmente dalla (6.8)

$$\{q_i, q_k\} = 0\,, \qquad \{p_i, p_k\} = 0 \qquad (6.9)$$
$$\{q_i, p_k\} = \delta_{ik}$$

(δ_{ik} è il simbolo di Kronecker e vale 1 se i=k, vale 0 per i≠k).
Le (6.9) sono le parentesi di Poisson fondamentali.
Di particolare interesse sono anche le seguenti parentesi di Poisson

$$\{q_i, B(q,p,t)\} = \frac{\partial B}{\partial p_i}\,, \qquad \{p_i, B(q,p,t)\} = -\frac{\partial B}{\partial q_i} \qquad (6.10)$$

(Le 6.9 e 6.10, con una opportuna interpretazione restano valide anche in Meccanica Quantistica).
Come vedremo nel seguito ci saranno molto utili le seguenti parentesi di Poisson: le parentesi di Poisson delle componenti del momento angolare, e le parentesi di Poisson tra le componenti del momento angolare e le coordinate q_i, p_i nel caso in cui le q_i siano le coordinate cartesiane e, quindi, $p_i = m\dot{x}_i$.
Dalla definizione di momento angolare si ha

$$\{L_x, L_y\} = \sum_i \left(\frac{\partial L_x}{\partial x_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial x_i} \right) = x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_z \qquad (6.11)$$

Analogamente

$$\{L_x, L_z\} = -L_y\,, \qquad \{L_y, L_z\} = L_x \qquad (6.12)$$

In forma compatta, usando il tensore di Ricci, si ha

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \tag{6.13}$$

(è sempre sottintesa la somma sugli indici ripetuti. Ricordiamo, inoltre, che il tensore di Ricci ε_{ijk} è così definito

$\varepsilon_{ijk} = 1$ se $i\,j\,k$ sono una permutazione pari di (1,2,3)

$= -1$ se $i\,j\,k$ sono una permutazione dispari di (1,2,3)

$= 0$ in tutti gli altri casi).

In maniera simile, usando il tensore di Ricci nella definizione del momento angolare

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k = (\vec{x} \wedge \vec{p})_i \tag{6.14}$$

e le (6.10), si ha

$$\{x_i, L_j\} = \frac{\partial L_j}{\partial p_i} = \varepsilon_{jki} x_k = \varepsilon_{ijk} x_k \tag{6.15}$$

$$\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k \tag{6.16}$$

(le 6.11 - 6.16, con un'opportuna interpretazione, restano valide anche in Meccanica Quantistica).

Per concludere calcoliamo la parentesi di Poisson tra il quadrato del momento angolare $\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ e una sua componente:

$$\{\vec{L}^2, L_i\} = \{L_j L_j, L_i\} = L_j \{L_j, L_i\} + \{L_j, L_i\} L_j$$

$$= L_j \varepsilon_{jik} L_k + \varepsilon_{jik} L_k L_i = 0$$

(Notiamo che al solito è sottintesa la somma sugli indici ripetuti e che la seconda uguaglianza è stata ottenuta usando una ben nota proprietà della derivata di un prodotto di funzioni).

Esempio 4. (Istituzioni di Fisica Teorica). Due oscillatori tridimensionali (= due punti materiali di massa m soggetti a forza elastica) interagiscono con una forza descritta dal potenziale

$$V = V_0 \, |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3 ,$$

$\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ essendo le coordinate dei due oscillatori. Quali delle tre seguenti grandezze sono costanti del moto:

$\vec{L}^{(1)}$ (= momento angolare dell'oscillatore 1)

$\vec{L}^{(2)}$ (= momento angolare dell'oscillatore 2)

$\vec{L}_1^{(1)} + \vec{L}^{(2)}$?

Soluzione:

Basta verificare per quali delle grandezze definite sopra la parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana si annulla. L'Hamiltoniana è data da

$$H = \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 \vec{x}_1^{\,2} \right) + \left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_2^2 \vec{x}_2^{\,2} \right) + V_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3 .$$

Pertanto

$$\{ L_i^{(1)}, H \} = \frac{\partial L_i^{(1)}}{\partial x_j^{(1)}} \frac{\partial H}{\partial p_j^{(1)}} - \frac{\partial L_1^{(1)}}{\partial p_j^{(1)}} \frac{\partial H}{\partial x_j^{(1)}} =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \, p_k^{(1)} \frac{p_j^{(1)}}{m} - \varepsilon_{ikj} \, x_k^{(1)} \left[m \omega_1^2 x_j^{(1)} + 3 V_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right]$$

$$= 3 V_0 \, |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \, \varepsilon_{ijk} \, x_j^{(1)} x_k^{(2)} \neq 0 ,$$

$$\{ L_i^{(2)}, H \} = 3 V_0 \, |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \, \varepsilon_{ijk} \, x_j^{(2)} x_k^{(1)} \neq 0 ,$$

$$\{ L_i^{(1)} + L_i^{(2)}, H \} = 0 .$$

Vale la pena di notare che senza l'uso delle parentesi di Poisson l'identificazione delle costanti del moto sarebbe stata più complicata.

Che la somma dei momenti angolari sia una costante è una conseguenza ovvia del fatto che le forze esterne $k\vec{x}_1$ e $k\vec{x}_2$ hanno momento nullo rispetto all'origine e pertanto il momento angolare totale del sistema rispetto all'origine deve conservarsi.

Esempio 5. (Equazioni di Blòch). Per renderci conto dell'utilità delle parentesi di Poisson studieremo il seguente problema.

In certe circostanze il comportamento di una particella in un campo magnetico è descritto soddisfacentemente dall'Hamiltoniana seguente

$$H = \mu \vec{B} \cdot \vec{J} ,$$

dove μ è un coefficiente numerico, $\vec{B}$ è l'induzione magnetica e $\vec{J}$ è il momento angolare intrinseco della particella. Usando per le componenti di $\vec{J}$ le parentesi di Poisson del momento angolare, è facile trovare come varia nel tempo $\vec{J}$. Si ha infatti

$$\frac{dJ_i}{dt} = \{ J_i , H \} = \mu (\vec{B} \wedge \vec{J})_i ,$$

(la derivazione di tale equazione senza usare le parentesi di Poisson sarebbe più laboriosa).

La soluzione di tale equazione si ottiene ricordando che se consideriamo un nuovo sistema di riferimento, ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto al sistema iniziale, la variazione istantanea del vettore $\vec{J}$ rispetto al sistema ruotante $d'\vec{J}/dt$ è

$$\frac{d'\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{J} .$$

Pertanto scegliendo $\vec{\omega} = \mu \vec{B}$ si ha

$$\frac{d'\vec{J}}{dt} = (\mu \vec{B} - \vec{\omega}) \wedge \vec{J} = 0 .$$

In tale sistema, pertanto, $\vec{J}$ è fisso, cioè nel sistema originario $\vec{J}$ ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno ad un asse diretto come $\vec{B}$. L'effetto di un campo magnetico uniforme costante è quello di causare una precessione uniforme del vettore momento angolare

$\vec{J}$ con velocità $\omega = \mu \vec{B}$.

Nel caso in cui al campo magnetico uniforme $\vec{B}$ si sovrapponga un campo magnetico $\vec{B}_1$ ruotante intorno all'asse di $\vec{B}$ con velocità angolare $\vec{\omega}_1$, il moto di $\vec{J}$ sarà una precessione di velocità angolare $\vec{\omega} = \mu(\vec{B}+\vec{B}_1)$ attorno all'asse $\vec{B}+\vec{B}_1$ ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}_1$ attorno a $\vec{B}$.

(Le equazioni precedenti sono usate per studiare risonanze paramagnetiche nucleari).

3. Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche

Come discusso nel capitolo precedente, una trasformazione dalle coordinate q, p a nuove coordinate Q, P,

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \quad , \quad P_i = P_i(q,p,t) \tag{6.17}$$

è canonica se si può trovare una funzione (Hamiltoniana) $K=(K(Q,P,t)$ delle nuove coordinate, tale che per le Q, P valgano le equazioni di Hamilton

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \tag{6.18}$$

Concettualmente, pertanto la caratterizzazione delle trasformazioni canoniche è ben definita. Nei casi pratici, il decidere se una trasformazione è canonica o no diviene in genere un problema non banale. Secondo quanto discusso nel capitolo precedente la via da seguire sarebbe quella di vedere se, data una trasformazione di tipo (6.17), esiste una funzione (generatrice) F che la genera. Ciò equivale ad integrare le equazioni (4.17-4.24). La via è spesso laboriosa come si può vedere dall'esempio seguente.

Esempio 6. Vediamo se la trasformazione

$$Q = \log\left|\frac{\sin p}{q}\right| \quad , \quad P = q \,\mathrm{ctg}\, p \tag{6.18}$$

è canonica. A tale scopo cerchiamo una funzione generatrice F che dipenda (ad esempio) dalle variabili p, P. Dovrà aversi, secondo le equazioni (4.24),

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} \; , \qquad q = - \frac{\partial F}{\partial p} \tag{6.19}$$

Per poter integrare tali equazioni occorre esprimere, mediante le (6.18), le coordinate Q e q in funzione di P, e p. Dalle (6.18) si ha

$$Q = \log \left| \frac{\cos p}{P} \right| \; , \qquad q = P \operatorname{tg} p \tag{6.20}$$

e le (6.11) diventano

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \log \left| \frac{\cos p}{P} \right| \; , \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = - P \operatorname{tg} p \tag{6.21}$$

Integrando la 2ª delle (6.21) si ha

$$F = P \log |\cos p| + f(P)$$

e sostituendo nella prima delle (6.21) si ottiene

$$\frac{\partial f(P)}{\partial P} = - \log |P| \; , \Rightarrow \quad f(P) = - P \log |P| + |P|$$

Pertanto

$$F = P \log \left| \frac{\cos p}{P} \right| + |P|$$

Esiste dunque una soluzione delle (6.21), cioè esiste una funzione generatrice e la trasformazione è canonica.

Un modo molto smeplice di vedere se una trasformazione è canonica è di usare le parentesi di Poisson.
Cominciamo col far vedere che le parentesi di Poisson fondamentali, (6.~~15~~9), sono invarianti per trasformazioni canoniche. Più precisamente faremo vedere che se

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \; , \qquad P_i = P_i(q, p, t) \tag{6.22}$$

sono nuove coordinate e la trasformazione è canonica si ha

$$\{Q_i, P_k\}_{q,p} \equiv \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial P_k}{\partial p_\ell} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_\ell}\frac{\partial P_k}{\partial q_\ell} \right\} = \delta_{ik}$$

$$= \left(\frac{\partial Q_i}{\partial Q_\ell}\frac{\partial P_k}{\partial P_\ell} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_k}{\partial Q_\ell} \right) \equiv \{Q_i, P_k\}_{Q,P} \qquad (6.23)$$

Infatti se la trasformazione (6.22) è canonica varranno le seguenti equazioni discusse nel capitolo precedente (4.17, 4.22-4.24)

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j}\frac{\partial F_I}{\partial q_i} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \; ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial^2 F_{III}}{\partial Q_j \partial p_i} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \qquad (6.24)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial q_i \partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \; ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial F_{IV}}{\partial P_j \partial p_i} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} .$$

Usando tali equazioni si ha

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial P_j}{\partial p_\ell} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_\ell}\frac{\partial P_j}{\partial q_\ell} =$$

usando la terza delle (6.24)

$$= \frac{\partial Q_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial P_j}{\partial p_\ell} + \frac{\partial q_\ell}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_\ell} =$$

usando la quarta delle (6.24)

$$= \frac{\partial p_\ell}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_\ell} + \frac{\partial q_\ell}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_\ell} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} = \delta_{ij}$$

Abbiamo così dimostrato le (6.23). Usando tale proprietà delle parentesi di Poisson fondamentali, non è difficile vedere che anche le parentesi di Poisson tra due variabili dinamiche $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$ sono invarianti per trasformazioni canoniche. Per definizione, l'espressione delle grandezze fisiche A e B in termini delle nuove coordinate Q, P si ottiene esprimendo le q, p come funzioni delle Q, P

$$q = q(Q,P,t) \quad , \qquad p = p(Q,P,t)$$

e sostituendo tali funzioni in $A(q,p,t)$ e $B(q,p,t)$

$$A'(Q,P,t) \equiv A(q(Q,P,t),\, p(Q,P,t),\, t)$$
$$B'(Q,P,t) \equiv B(q(Q,P,t),\, p(Q,P,t),\, t) \tag{6.25}$$

Vogliamo far vedere che

$$\{A', B'\}_{Q,P} \equiv \{A, B\}_{Q,P} = \{A, B\}_{q,p} \tag{6.26}$$

Cominciamo col notare che le (6.26) valgono se B è una delle vecchie coordinate canoniche

$$\{A(q,p), q_i\} = \frac{\partial A}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} - \frac{\partial A}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_j} + \frac{\partial A}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial Q_j}\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$$

$$- \frac{\partial A}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial A}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial P_j}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial q_m}\{q_m, q_i\}_{Q,P} - \frac{\partial A}{\partial p_m}\{p_m, q_i\}_{Q,P}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial p_i} = \{A, q_i\}_{q,p}$$

In caso in cui B sia una variabile generica segue allora immediatamente. Si ha infatti

$$\{A,B\}_{Q,P} = \frac{\partial A}{\partial Q_i}\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right) -$$

$$- \frac{\partial A}{\partial P_i}\left(\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial B}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}\right) =$$

$$= \frac{\partial B}{\partial q_j}\{A, q_j\}_{Q,P} + \frac{\partial B}{\partial p_j}\{A, p_j\}_{Q,P}$$

$$= \{A, B\}_{q,p}$$

Concludendo abbiamo dimostrato che le trasformazioni canoniche lasciano invarianti le parentesi di Poisson. Vale anche il viceversa.

Non è difficile verificare che l'invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali (6.9) caratterizza le trasformazioni canoniche, cioè se una trasformazione di coordinate $q \longrightarrow Q$, $p \longrightarrow P$ lascia invarianti le (6.9), è canonica, cioè esiste una Hamiltoniana $K(Q,P,t)$ tale che

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \tag{6.27}$$

Infatti si ha

$$\frac{d}{dt}Q_i = \{Q_i, H\}_{q,p}$$

$$\frac{d}{dt}P_i = \{P_i, H\}_{q,p}$$

e per l'invarianza delle parentesi di Poisson

$$\{Q_i, H\}_{q,p} = \{Q_i, H\}_{Q,P} ; \quad \{P_i, H\}_{q,p} = \{P_i, H\}_{Q,P} ,$$

si ha

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, H\}_{Q,P} \qquad = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

Basta pertanto porre

$$K(Q,P,t) = H(q(Q,P\ ),\ p(Q,P,\ ),t)$$

per ottenere le equazioni (6.27).
La caratterizzazione delle trasformazioni canoniche come quelle che lasciano invarianti le parentesi di Poisson fondamentali semplifica moltissimo il compito di decidere se una trasformazione è canonica o no. Tale verifica è ridotta al calcolo di semplici derivate.

Esempio 7. Verificare che la trasformazione

$$Q = \sqrt{\frac{p}{k}}\sin q, \qquad P = \sqrt{4kp}\,\cos q$$

è canonica. Si ha

$$\{Q, P\}_{q,p} = \sqrt{\frac{p}{k}}\cos q\,\frac{\sqrt{4k}}{2\sqrt{p}}\cos q + \frac{1}{2\sqrt{kp}}\sin q\,\sqrt{4kp}\,\sin q = 1$$

e quindi la trasformazione è canonica. Assai più lunga sarebbe stata la verifica di canonicità usando le equazioni del capitolo precedente.

Esempio 8. Trovare sotto quali condizioni per i parametri α, β la trasformazione

$$Q = q^{\alpha}\cos(\beta p), \qquad P = q^{\alpha}\sin(\beta p)$$

è canonica. Usando le parentesi di Poisson si ottiene

$$\{Q, P\}_{q,p} = \alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p)\,q^{\alpha}\beta\cos(\beta p) +$$
$$+ q^{\alpha}\beta\sin(\beta p)\,\alpha q^{\alpha-1}\sin(\beta p) = \alpha\beta q^{2\alpha-1}$$

Perchè la trasformazione sia canonica occorre e basta che la parentesi di Poisson calcolata sopra sia indipendente da q ed uguale ad 1. Deve aversi pertanto

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = 2$$

Senza usare le parentesi di Poisson, si sarebbe dovuto cercare la generatrice

$$F_{III} = -\frac{Q^2}{2}\, tg(2p)$$

la cui determinazione non è altrettanto immediata.

Esempio 9. Vediamo quanto semplice diventi la verifica che la trasformazione dell'esempio 6 è canonica.

$$\{Q,P\}_{q,p} = -\left|\frac{q}{\sin p}\right| \frac{|\sin p|}{|q|^2}\frac{q}{|q|}\, q\, \frac{-1}{\sin^2 q} - \left|\frac{q}{\sin p}\right| \frac{1}{|q|}\cos p \frac{\sin p}{|\sin p|}\frac{\cos p}{\sin p}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 q} - \frac{\cos^2 q}{\sin^2 q} = 1 = \{Q,P\}_{Q,P}$$

Ovviamente $\{Q,Q\} = 0 = \{P,P\}$. Dunque la trasformazione è canonica.

Esempio 10. Consideriamo l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + k^2 q^2\right)$$

e vediamo se è possibile trovare una trasformazione canonica che metta l'Hamiltoniana nella forma seguente

$$H = \frac{1}{2}\alpha\left(P^2 + Q^2\right)$$

Tentiamo con una trasformazione del tipo

$$P = a p, \qquad Q = b q .$$

Perchè la trasformazione sia canonica occorre che sia

$$\{Q,P\} = ab = 1$$

E' facile vedere che prendendo $a = 1/\sqrt{m\omega}$, $b = \sqrt{m\omega}$, $\omega = k/m$ si ottiene

$$H = \frac{1}{2}\omega\left(P^2 + Q^2\right)$$

Esempio 11. Supponiamo di dover studiare un sistema descritto dalla seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\omega\left(p^2+q^2\right) + \frac{1}{2} a q p = \frac{1}{2}\omega\left[p^2+q^2+kqp\right]$$

$(k = a/\omega)$. [Termini del tipo qp compaiono ad esempio nella

Hamiltoniana del pendolo di Foucault di cui l'Hamiltoniana precedente rappresenta un caso semplificato]. La soluzione delle equazioni di Hamilton

$$\dot{q} = \omega p + \frac{k}{2} q , \qquad \dot{p} = -\omega q - \frac{k}{2} p$$

non è immediata. Il problema si semplifica moltissimo se si introducono le nuove variabili Q, P, mediante la seguente trasformazione

$$q = \frac{1}{2(1-k^2)^{1/4}} \left\{ \left(\sqrt{1-k} + \sqrt{1+k}\right) Q + \left(\sqrt{1-k} - \sqrt{1+k}\right) P \right\}$$

$$p = \frac{1}{2(1-k^2)^{1/4}} \left\{ \left(\sqrt{1-k} - \sqrt{1+k}\right) Q + \left(\sqrt{1-k} + \sqrt{1+k}\right) P \right\}$$

In termini delle Q, P l'Hamiltoniana prende la forma seguente

$$H\left(q(Q,P),\ p(Q,P)\right) = \frac{\omega(2+k^2)}{4\sqrt{1-k^2}} \left(P^2 + Q^2\right) = H'(Q,P)$$

che è la forma dell'Hamiltoniana di un oscillatore armonico. L'unica cosa che resta da fare è verificare che la trasformazione dalle q, p alle Q, P è canonica in modo che H' (Q, P) possa essere interpretata come Hamiltoniana per le variabili Q, P, e quindi si possano scrivere le equazioni di Hamilton.

Di nuovo la verifica di canonicità mediante la ricerca della funzione generatrice sarebbe un problema piuttosto lungo e laborioso. E' invece molto semplice verificare se la trasformazione lascia invarianti le parentesi di Poisson fondamentali. In effetti si ha

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{1-k+1+k+2\sqrt{1-k^2} - \left(1-k+1+k-2\sqrt{1-k^2}\right)}{4(1-k^2)^{1/2}} \{Q,P\}_{Q,P}$$

$$= \{Q,P\}_{Q,P} = 1$$

cioè la trasformazione è canonica.

Esempio 12. Vediamo se la trasformazione

$$Q_i = q_i , \qquad P_i = -p_i \tag{6.28}$$

è canonica. Il significato fisico di tale trasformazione si vede facilmente quando si usano coordinate cartesiane: essa corrisponde a

$$x_i \to x_i \,, \qquad \dot{x}_i \to -\dot{x}_i \tag{6.28'}$$

ed equivale pertanto al rovesciamento del tempo

$$t \to -t$$

E' facile vedere che le equazioni di Newton in coordinate cartesiane e quindi quelle di Lagrange sono invarianti rispetto alla trasformazione

$$x_i \to x_i \,, \qquad \dot{x}_i \to -\dot{x}_i$$

(Si ricordi che la Lagrangiana è una funzione quadratica di $\dot{x}_i$ e quindi è invariante per la trasformazione (6.28'). Tale invarianza traduce il fatto fisico che i fenomeni meccanici sono reversibili.

Per vedere se la trasformazione (6.28) è canonica basta verificare se le parentesi di Poisson sono invarianti sotto tale trasformazione. Si ha subito

$$\{Q_i, P_j\} = -\{q_i, p_j\} = -\delta_{ij}$$

pertanto la trasformazione <u>non</u> è canonica.

4. Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche infinitesime

Nel paragrafo precedente si è vista l'utilità delle parentesi di Poisson nel verificare se una trasformazione è canonica o no. Vedremo ora come le parentesi di Poisson servano anche per caratterizzare le variazioni infinitesime di variabili dinamiche, cioè di funzioni del tipo $A(q,p,t)$, sotto trasformazioni canoniche infinitesime.

Ricordiamo che una trasformazione canonica infinitesima è una trasformazione del tipo (per comodità la scegliamo indipendente dal tempo)

}
Q,P

$$Q_i = q_i + \varepsilon f(q,p) \,, \qquad P_i = p_i + \varepsilon g_i(q,p) \tag{6.29}$$

dove ε è un parametro, $\varepsilon \ll 1$. (Per una discussione più completa si veda il capitolo precedente). Al primo ordine in ε le equazioni precedenti si invertono

$$\begin{aligned} q_i &= Q_i - \varepsilon f_i(Q,P) \\ p_i &= P_i - \varepsilon g_i(Q,P) \end{aligned} \tag{6.30}$$

Una grandezza fisica o variabile dinamica A descritta dalla funzione $A(q,p,t)$ in termini delle coordinate q, p, è descritta da una nuova funzione $A'(Q,P,t)$ nelle nuove variabili Q, P:

$$\begin{aligned} A'(Q,P,t) &\equiv A(q(Q,P), p(Q,P), t) = A(Q - \varepsilon f, P - \varepsilon g, t) = \\ &= A(Q,P,t) - \varepsilon \left(\frac{\partial A}{\partial Q_i} f_i + \frac{\partial A}{\partial P_i} g_i \right) \end{aligned} \tag{6.31}$$

Come si vede la forma delle funzioni è cambiata nel passare dalle q, p alle Q, P. In genere, una data variabile dinamica è descritta da funzioni diverse nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro.

<u>Esempio</u>. Si veda il caso discusso nel paragrafo 4 del capitolo I. L'energia cinetica è descritta da funzioni diverse nel passaggio dal sistema di coordinate x, y, z al sistema x', y', z'.

E' abbastanza naturale domandarsi se esiste un metodo semplice per determinare di quanto varia la funzione che descrive una data variabile dinamica, quando si fa una trasformazione infinitesima di coordinate. In particolare se tale variazione è nulla la funzione è invariante sotto la data trasformazione. Tale proprietà assume la massima importanza quando la funzione invariante è l'Hamiltoniana; questo fatto traduce una proprietà di simmetria del sistema e, come vedremo in seguito, porta a conseguenze fisiche notevoli.

Per rispondere alla domanda precedente cominciamo col vedere quale relazione c'è tra le funzioni f e g e la funzione generatrice della trasformazione. La generatrice della trasformazione infinitesima si potrà scrivere nella forma seguente

$$F_2 = \sum q_i P_i + \varepsilon G(q,P)$$

avendo scelto come variabili indipendenti q, P. Come abbiamo visto nel capitolo precedente il primo termine genera la trasformazione identità: q, p $\rightarrow$ q, p. Il secondo termine G detto anche generatore è quello che dà luogo alla variazione di q e p. Usando la forma (4.22) delle trasformazioni canoniche si ha subito

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,P)}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q_i} + O(\varepsilon^2)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,P)}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_i} + O(\varepsilon^2)$$

avendo sviluppato in serie le funzioni $\frac{\partial G(q,P)}{\partial q_i}$ e $\frac{\partial G(q,P)}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}$

in un intorno di $P_i = p_i$. Trascurando infinitesimi di ordine superiore ad ε si ha pertanto

$$\delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q_i} = \varepsilon \{p_i, G\}_{q,p}$$

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \varepsilon \{q_i, G\}_{q,p}$$

<u>Le variazioni infinitesime delle q, p sono date dalla parentesi di Poisson di q, p con il generatore G(q,p).</u>

<u>Esercizi.</u> Vediamo quali trasformazioni sono generate dai momenti p_i, dalle componenti del momento angolare, dall' Hamiltoniana etc.

a) Traslazioni

Consideriamo il caso in cui il generatore della trasformazione infinitesima è il momento i-esimo p_i. Si ha subito

$$\delta q_j = 0 \quad , \quad j \neq i \qquad \qquad \delta p_K = 0$$

$$\delta q_i = \varepsilon \{ q_i , p_i \} = \varepsilon \quad , \qquad Q_i = q_i + \varepsilon$$

Pertanto p_i è il generatore di una traslazione infinitesima nella direzione i-esima. (Tale risultato si manterrà valido anche in Meccanica quantistica).

b) Rotazioni

Scegliamo ora come generatore la componente x del momento angolare. In coordinate cartesiane si ha

$$\delta x_j = \varepsilon \{ x_j , L_1 \} = \varepsilon \, \varepsilon_{j1K} x_K$$

$$\Rightarrow \quad \delta x_1 = 0 \quad , \quad x_2' = x_2 - \varepsilon x_3 \quad , \quad x_3' = x_3 + \varepsilon x_2$$

$$\delta p_1 = 0 \quad , \qquad p_2' = p_2 - \varepsilon p_3 \quad , \qquad p_3' = p_3 + \varepsilon p_2$$

$$\delta L_1 = 0 \quad , \qquad L_2' = L_2 - \varepsilon L_3 \quad , \qquad L_3' = L_3 + \varepsilon L_2$$

L_1 è dunque il generatore di una rotazione infinitesima attorno all'asse 1. (Analogamente L_3 è il generatore di una rotazione infinitesima attorno all'asse 3 etc.).

c) Traslazioni temporali

In modo analogo si vede che l'Hamiltoniana è il generatore delle traslazioni temporali ($\varepsilon = \Delta t$)

$$\Delta q_i = \Delta t \{ q_i , H \} = \Delta t \, \dot{q}$$

$$\Delta p_i = \Delta t \, \dot{p}_i .$$

E' questo un risultato già noto e discusso ampiamente nel paragrafo 1.

d) Trasformazioni di Galilei

Consideriamo un punto materiale di massa m e coordinate x_i rispetto ad un sistema di riferimento R. Se si passa ad un sistema di coordinate x'_i relative ad un riferimento R', in moto rettilineo uniforme rispetto ad R con velocità $\vec{v}$ si ha

$$x' = x - v_x t\,, \qquad y' = y - v_y t\,, \qquad z' = z - v_z t$$

$$p'_x = p_x - m v_x\,, \qquad p'_y = p_y - m v_y\,, \qquad p'_z = p_z - m v_z$$

Queste trasformazioni sono dette trasformazioni di Galilei. Non è difficile verificare che il generatore di tali trasforazioni è

$$G = -\vec{v}\,\vec{p}\,t + m\vec{v}.\vec{x}$$

Si ha infatti

$$\delta x_i = \epsilon\{x_i, G\} = \varepsilon v_i t$$

$$\delta p_i = -\varepsilon m v_i$$

— . —

Vediamo come varia la funzione A(q,p,t), che descrive una data variabile dinamica, sotto trasformazioni infinitesime. Usando i risultati precedenti si ha

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\delta p_i$$

$$= \varepsilon\frac{\partial A}{\partial q_i}\{q_i, G\} + \varepsilon\frac{\partial A}{\partial p_i}\{p_i, G\} = \varepsilon\{A, G\}$$

Dunque la parentesi di Poisson con il generatore G dà la variazione infinitesima di ogni variabile dinamica. In particolare una variabile dinamica è invariante sotto una trasformazione infinitesima se la sua parentesi di Poisson con il generatore è nulla. Se ciò succede la variabile data è anche invariante sotto la trasformazione finita dato che quest'ultima può ottenersi iterando la trasformazione infinitesima.

Esempio 13. L'Hamiltoniana di una particella soggetta a potenziale centrale V=V(r) è invariante per rotazioni attorno ai tre assi. Verifichiamolo, ad esempio, per rotazioni infinitesime attorno all'asse $z=x_3$, ($\delta\theta=\varepsilon$),

$$H=\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+V(r)\ , \qquad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\ ,$$

$$\delta H=\varepsilon\{H,L_3\}=\frac{\varepsilon}{2m}\left[p_i\{p_i,L_3\}+\{p_i,L_3\}p_i\right]+$$

$$+\varepsilon\left[\{V(r),x_1\}p_2+x_1\{V(r),p_2\}-\{V(r),x_2\}p_1-x_2\{V(r),p_1\}\right]$$

= usando le equazioni (6.10), (6.15), (6.16) =

$$=\frac{\varepsilon}{m}\,p_i\,\varepsilon_{i3k}\,p_k+\varepsilon\left(x_1\frac{\partial V(r)}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial V(r)}{\partial x_1}\right)=0$$

Un caso particolarmente interessante è quando l'Hamiltoniana è invariante sotto una trasformazione canonica di cui G è il generatore. Per quanto visto precedentemente ciò equivale alla proprietà seguente

$$\delta H=\{H,G\}=0$$

Pertanto se G non dipende esplicitamente dal tempo, G è una costante del moto

$$\frac{dG}{dt}=\{G,H\}=0$$

Abbiamo così trovato l'importante legame tra proprietà di simmetria e costanti del moto. <u>Se il sistema in esame è simmetrico rispetto ad una data trasformazione di coordinate, il corrispondente generatore è una costante del moto.</u>

Esempio 14. Se il sistema in esame ha simmetria sferica, (V. esempio 13): la sua Hamiltoniana è invariante per rotazioni attorno ai tre assi e quindi il momento angolare $\vec{L}$ è una costante del moto.

Analogamente se il sistema è simmetrico per traslazioni rispetto all'asse x, il corrispondente generatore P_x (= componente x del momento della quantità di moto) è una costante del moto.

—— , ——

Un caso particolare della proprietà discussa precedentemente è realizzato quando una coordinata q_i lagrangiana è ciclica. In tal caso il sistema è simmetrico per trasformazioni del tipo

$$q_i \rightarrow q_i + a \,, \qquad q_j \rightarrow q_j \qquad j \neq i$$

l'Hamiltoniana è invariante sotto tale trasformazione e il corrispondente generatore, che coincide con il momento coniugato a q_i, è una costante del moto

$$p_i = \text{cost}$$

Concludendo, i momenti coniugati a variabili lagrangiane cicliche sono i generatori di trasformazioni di simmetria del sistema. Abbiamo pertanto una giustificazione ulteriore (si veda la discussione fatta nel cap. III) per introdurre i momenti p_i al posto delle $\dot{q}_i$, quali coordinate canoniche per discutere l'atto di moto del sistema. Rispetto alle $\dot{q}_i$ è evidente il notevole significato fisico delle p_i.

5. Proprietà generali delle parentesi di Poisson

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti l'utilità delle parentesi di Poisson nella soluzione dei problemi di meccanica. Vale dunque la pena di studiarne le proprietà generali. Esse saranno di aiuto nell'uso delle parentesi di Poisson. Inoltre è interessante notare che tali caratteristiche generali si manterranno invariate quando si passerà dalle parentedi di Poisson della meccanica classica a "quelle" della Meccanica quantistica.
Facendo uso della definizione di parentesi di Poisson fra due grandezze A(q,p,t) e B(q,p,t) si ha facilmente

a) $\{A, B\} = -\{B, A\}$

b) $\{A, A\} = 0$

c) $\{A, B+C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$

d) $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$

Meno immediata, ma di fondamentale importanza è l'identità di Jacobi

e) $\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$

Essa dice che la somma delle doppie parentesi di Poisson ottenute permutando ciclicamente tre variabili, A, B, C, è nulla.
E' inutile insistere sul fatto che le proprietà a)-e) rendono molto più rapidi i calcoli quando si fa uso delle parentesi di Poisson. Ci basta notare che la loro importanza non è solo formale. Ad esempio dall'identità di Jacobi segue l'importante risultato che la parentesi di Poisson di due costanti del moto è anch'essa una costante del moto (teorema di Jacobi). Se A e B sono infatti due costanti del moto si ha, usando la e),

$$\{H, \{A, B\}\} = -\{B, \{H, A\}\} - \{A, \{B, H\}\} = 0$$

Tale proprietà fisica permette di costruire nuovi integrali del moto da integrali noti.

Esempio. Se due componenti del momento angolare, ad esempio L_1, L_2 sono costanti del moto, tale è anche L_3. Si ha infatti

$$\{L_1, L_2\} = L_3$$

e per il teorema di Jacobi

$$\{L_3, H\} = 0 \qquad \text{se} \qquad \{L_1, H\} = \{L_2, H\} = 0 \, .$$

ESERCIZI PROPOSTI

1.

Un punto materiale P è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio r in un piano verticale. Scrivere l'equazione del moto P nel caso in cui C si muova con accelerazione costante 1) orizzontale 2) verticale.

2.

Un punto di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro C e raggio r in un piano verticale. Scrivere l'equazione del moto di P nel caso in cui il centro C si muova secondo la legge temporale seguente $x_C = A \cos \omega t$.

3.

Studiare le equazioni di moto del sistema descritto nel problema 1, con la differenza che ora invece di assegnare il moto del centro del cerchio si considerano i due casi seguenti

i) al cerchio che ha massa M è applicata una forza costante $\vec{F} = \overrightarrow{cost}$

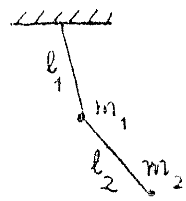
ii) al cerchio che ha massa M è applicata una forza elastica

Si discutano i gradi di libertà del sistema e le differenze rispetto al problema 1. Dare una spiegazione fisica (non formale) delle differenze. Scrivere le equazioni anche usando le equazioni di Newton.

4.

Scrivere la lagrangiana e le equazioni di moto per un doppio pendolo di lunghezze l_1 ed l_2 e masse m_1, m_2

Scrivere anche le equazioni di moto usando le equazioni di Newton e confrontare i due metodi.



5.

(Deviazione dei gravi verso Est). Un corpo cade liberamente da un'altezza di 200 metri, all'equatore. Inizialmente è fermo. Determinare di quanto è deviato quando tocca terra. (Usare le equazioni di Lagrange). Discutere le approssimazioni. Valutare l'effetto della forza centrifuga ricordando che la velocità angolare di rotazione della terra è 7.3×10^{-5} radianti/sec.

6.

Discutere il teorema di Larmor per il positronio. Il positronio è un atomo costituito da un elettrone di carica $-e$ e un elettrone di carica $+e$ (detto positrone). Discutere gli ordini di grandezza e le approssimazioni possibili quando il positronio si trova in un campo magnetico di 10.000 gauss. Quali sono le differenze rispetto all'atomo di idrogeno (costituito da un protone e da un elettrone)?

7.

(Pendolo di Foucault). Studiare l'effetto della rotazione terrestre sulle piccole oscillazioni di un pendolo. Si facciano le seguenti approssimazioni

1) Si trascurino gli spostamenti lungo la verticale cosicchè il moto possa considerarsi sul piano orizzontale
2) Si tenga conto del fatto che la velocità angolare della rotazione terrestre è $\omega = 7.5 \times 10^{-5}$ radianti/sec cosicchè 2
   è trascurabile rispetto alla velocità angolare del pendolo.

Scrivere le equazioni di Lagrange e tentare la soluzione introducendo la variabile $\eta = x + iy$.

8.

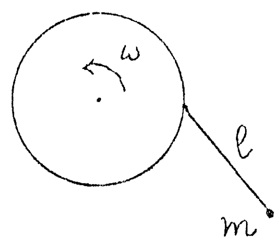
Studiare il moto di un pendolo di massa m e lunghezza l il cui punto di sospensione di massa trascurabile si muove di moto circolare uniforme.

Studiare lo stesso problema nei seguenti casi

i) il punto di sospensione di massa m_1 si muove con accelerazione verticale costante

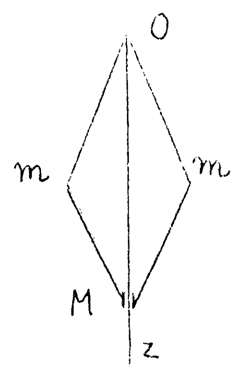
ii) al punto di sospensione di massa m_1 è applicata una forza elastica.

Ricavare le equazioni anche con il metodo newtoniano.



9.

Studiare il sistema descritto in figura.

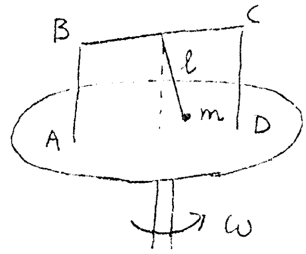


La massa M può scorrere lungo l'asta O_z verticale, facendo conseguentemente muovere le due masse m, mentre il punto O è fisso. Il sistema ruota inizialmente con velocità angolare ω_0 attorno all'asse O_z.

Discutere i gradi di libertà del sistema, le proprietà di simmetria e le conseguenze dinamiche.

10.

Studiare il moto del pendolo descritto in figura.



L'arco ABCD a cui è sospeso il pendolo solidale al disco che ruota con velocità angolare costante ω. Il pendolo può oscillare in un piano normale ad ABCD. Studiare le piccole oscillazioni.

11.

Due sferette di massa m e carica +q e -q rispettivamente sono sospese mediante fili di lunghezza l in modo da formare due pendoli. Scrivere le equazioni di Lagrange. Studiare il moto quando gli spostamenti dall'equilibrio sono piccoli e si possono trascurare gli spostamenti verticali. Studiare lo stesso problema nel caso in cui le sferette siano scariche ma legate da una molla di costante k.

12.

Scrivere la funzione Hamiltoniana per i sistemi descritti nei problemi 1 e 2, e discutere la relazione con l'energia del punto materiale. L'Hamiltoniana è una costante del moto? Interpretare fisicamente i risultati. Scrivere le equazioni di Hamilton nei due casi.

13.

Scrivere la funzione Hamiltoniana per i sistemi descritti nel problema 3. E' una costante del moto? Che relazione c'è tra Hamiltoniana ed energia del sistema? Discutere le differenze rispetto al problema precedente.

17.

Si consideri l'esempio 8 del Cap. III, e si consideri il caso in cui il punto massa m si muove in un'orbita circolare stabile ad altezza h. Trovare la frequenza delle piccole oscillazioni in r quando si comunica al punto di massa m un piccolo impulso nella direzione tangente alla superficie conica e ortogonale all'orbita.

18.

Determinare sotto quali condizioni per i parametri α, β, α', β', la trasformazione

$$Q = \alpha q + \beta p, \qquad P = \alpha' q + \beta' p$$

è canonica.
Determinare la generatrice della trasformazione quando essa è canonica.

19.

Determinare se la trasformazione

$$Q = \sqrt{q}\cos 2p \qquad P = \sqrt{q}\sin 2p$$

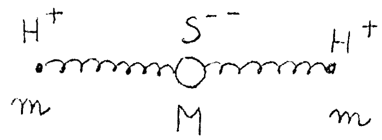
è canonica.
Cercare se esiste la generatrice.

20.

Due oscillatori armonici unidimensionali (= due punti materiali soggetti a forza elastica di uguale costante elastica k) di ugual massa m, interagiscono con una forza descritta dal potenziale $V = V_o\ (x_1\ x_2)^2$, x_1 e x_2 essendo le rispettive coordinate. Trovare l'Hamiltoniana e le frequenze proprie del sistema. Si determini la trasformazione canonica che trasforma l'Hamiltoniana in quella dei due oscillatori armonici disaccoppiati.

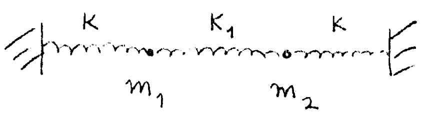
21.

La molecola H_2S può, in taluni casi, essere schematizzata come costituita da tre punti di massa m, M e m (V. figura) interagenti tra di loro con forza elastica di costante k. Trovare le frequenze proprie di oscillazione e discuterne i moti corrispondenti.



22.

Si consideri il sistema costituito da due punti di massa m_1 ed m_2 interagenti tra di loro con forza elastica di costante k_1 e soggett ad una forza elastica di costante k.
Trovare le frequenze proprie di oscillazione e trovare la trasformazione canonica che trasforma l'Hamiltoniana nell'Hamiltoniana di due oscillatori armonici disaccoppiati.



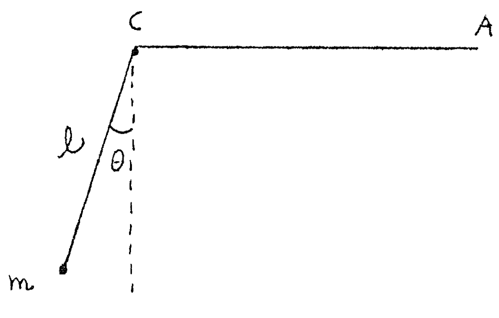
ESERCIZIO

Il filo di un pendolo di massa m passa attraverso ad una carrucola fissa C (v. fig.). Il filo viene tirato all'estremo A con velocità costante v.

a) Scrivere la lagrangiana. Scrivere le equazioni di Hamilton nel caso di piccole oscillazioni $\theta^2 << 1$.

b) Che relazione c'è tra l'Hamiltoniana e l'energia del pendolo? Il momento angolare è una costante del moto?

c) Sia l_o la lunghezza del pendolo all'istante t=0 e si consideri il caso in cui $(vt/l_o)^2 << 1$ e $(vt/l_o)\theta^2 << 1$. Trovare la trasformazione canonica che trasforma l'Hamiltoniana in quella di un oscillatore armonico. Determinare la funzione generatrice. Discutere la frequenza di oscillazione così trovata.
(Si consiglia inizialmente di fare la trasformazione canonica $p = l\sqrt{m}\,P$, $\theta = Q/(l\sqrt{m})$.



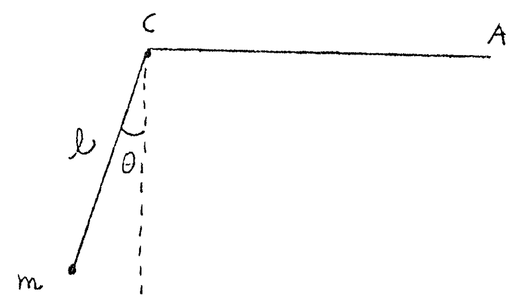
ESERCIZIO

Il filo di un pendolo di massa m passa attraverso ad una carrucola fissa C (v. fig.). Il filo viene tirato all'estremo A con velocità costante v.

a) Scrivere la lagrangiana. Scrivere le equazioni di Hamilton nel caso di piccole oscillazioni $\theta^2 << 1$.

b) Che relazione c'è tra l'Hamiltoniana e l'energia del pendolo? Il momento angolare è una costante del moto?

c) Sia l_o la lunghezza del pendolo all'istante t=0 e si consideri il caso in cui $(vt/l_o)^2 << 1$ e $(vt/l_o)\theta^2 << 1$. Trovare la trasformazione canonica che trasforma l'Hamiltoniana in quella di un oscillatore armonico. Determinare la funzione generatrice. Discutere la frequenza di oscillazione così trovata.
(Si consiglia inizialmente di fare la trasformazione canonica $p = l\sqrt{m}\,P$, $\theta = Q/(l\sqrt{m})$.



ESERCIZIO

Il filo di un pendolo di massa m passa attraverso ad una carrucola fissa C (v. fig.). Il filo viene tirato all'estremo A con velocità costante v.

a) Scrivere la lagrangiana. Scrivere le equazioni di Hamilton nel caso di piccole oscillazioni $\theta^2 \ll 1$.

b) Che relazione c'è tra l'Hamiltoniana e l'energia del pendolo? Il momento angolare è una costante del moto?

c) Sia l_o la lunghezza del pendolo all'istante t=0 e si consideri il caso in cui $(vt/l_o)^2 \ll 1$ e $(vt/l_o)\theta^2 \ll 1$. Trovare la trasformazione canonica che trasforma l'Hamiltoniana in quella di un oscillatore armonico. Determinare la funzione generatrice. Discutere la frequenza di oscillazione così trovata.
(Si consiglia inizialmente di fare la trasformazione canonica $p = l\sqrt{m}\, P$, $\theta = Q/(l\sqrt{m})$.