

Indice del capitolo 3:

3. Problema dei 3 corpi ristretto circolare. Equazioni del moto, integrale di Jacobi, criterio di stabilità di Hill. Esempi di moti ordinati e moti caotici (anche in assenza di instabilità macroscopiche). Accenni al problema ristretto ellittico

- Il problema dei 3 corpi ristretto circolare: equazioni del moto nel riferimento inerziale
- Equazioni del moto nel riferimento rotante, integrale di Jacobi e suo significato
- Curve di livello dell'integrale di Jacobi e posizioni di equilibrio
- Curve a velocità zero e criterio di stabilità di Hill
- Criterio di stabilità di Hill applicato agli asteroidi, calcolo del punto di equilibrio tra le masse della binaria e sfera di influenza

=====

Programma di: [ELEMENTI DI MECCANICA CELESTE](#)

Docente: [ANNA M. NOBILI](#)

Anno Accademico: 2009-1010

Laurea [Matematica \(Triennale\)](#) **Anno di Corso** [Terzo](#) **Semestre** [Primo](#)

Numero crediti : 7 (6 per la laurea magistrale), 45 ore

CONTENUTI DELL' INSEGNAMENTO

Il Corso si articola nei seguenti 5 argomenti principali tra loro collegati:

1. Problema dei 2-corpi ed Equazione di Keplero. Soluzione del problema dei 2-corpi con l'uso del vettore di Lenz. Orbite ed elementi orbitali. Equazione di Keplero, legge oraria e soluzione numerica..
2. Problema dei 2-corpi in caso di violazione del Principio di Equivalenza. Soluzione, confronto con il caso classico e rilevanza per esperimenti spaziali con corpi celesti e/o artificiali
3. Problema dei 3 corpi ristretto circolare. Equazioni del moto, integrale di Jacobi, criterio di stabilità di Hill. Esempi di moti ordinati e moti caotici (anche in assenza di instabilità macroscopiche). Accenni al problema ristretto ellittico
4. Moti della Terra come corpo esteso. Si scrivono e si risolvono le equazioni che descrivono il moto dei poli della Terra (precessione libera, precessione lunisolare e loro effetti astronomici).
5. Potenziale mareale ed effetti della marea. Si ricava il potenziale che genera le maree. Si discutono gli effetti della marea sul moto della Terra, della Luna e di altri corpi del Sistema Solare

§5. IL PROBLEMA DEI 3-CORPI RISTRETTO CIRCOLARE

- Si definisce problema dei 3 corpi ristretto lo studio del moto di due corpi P_1 e P_2 - primario e secondario - di masse m_1 ed m_2 le loro confrontabili (puntiformi o con distribuzione di massa a simmetria sferica), più un terzo corpo P_3 di massa trascurabile rispetto a P_1 e P_2 . Il moto di P_3 è quindi influenzato da P_1 e P_2 ma non reagisce su di essi: che orbitano - come se P_3 non ci fosse - attorno al proprio centro di massa. Nel problema dei 3-corpi ristretto circolare le orbite di P_1 e P_2 sono circolari.
- Mi limito al caso piano e farò notare quando la generalizzazione al caso tridimensionale presenta dei problemi.

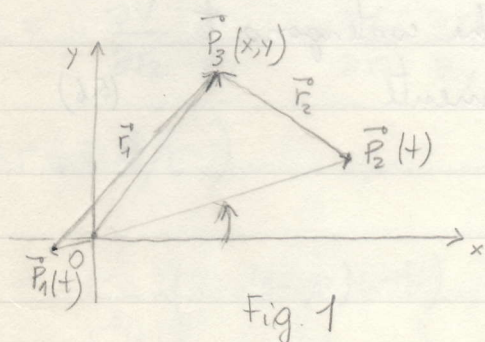


Fig. 1

Oxy sistema di riferimento inerziale centrato nel centro di massa di m_1 ed m_2
 ↑ verso di rotazione di P_1 e P_2

(A $t=0$ $\vec{P}_1(0)$ e $\vec{P}_2(0)$ giacciono sull'asse delle x)

Fissò le unità di massa, lunghezza e tempo nel modo seguente:

$$\begin{cases} M_{\text{tot}} \equiv m_1 + m_2 = 1 \\ d \equiv |\vec{P}_2 - \vec{P}_1| = 1 \\ G = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

e definisco

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \mu \quad (5.2)$$

(il secondario ha una frazione μ della massa totale)

$$\frac{m_1}{m_1+m_2} = 1-\mu$$

(5.3)

Allora

$$|\vec{P}_1 - \vec{O}| = \mu \quad ; \quad |\vec{P}_2 - \vec{O}| = 1-\mu \quad (5.4)$$

e per la 3^a legge di Keplero:

$$n^2 d^3 = G (m_1 + m_2) \quad \left(n = \text{moto medio} = \frac{2\pi}{\text{periodo orbitale}} \right)$$

con le unità (5.1):

$$n=1, \quad P=2\pi \quad (5.5)$$

↑ periodo orbitale di $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ attorno al loro centro di massa O.

Se $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ giacciono sull'asse x a $t=0$ le loro coordinate al tempo t sono:

$$\begin{cases} \vec{P}_2(t) = ((1-\mu)\cos t, (1-\mu)\sin t) \\ \vec{P}_1(t) = (-\mu\cos t, -\mu\sin t) \end{cases} \quad \text{+ si noti che contengono } t \text{ esplicitamente} \quad (5.6)$$

mentre

$$\vec{P}_3 = (x, y)$$

L'energia potenziale (per unità di massa) del 3° corpo dovuta alla attrazione gravitazionale di m_1 ed m_2 è: (con le unità (5.1))

$$V(x, y, t) = - \frac{\mu}{|\vec{P}_3 - \vec{P}_2(t)|} - \frac{1-\mu}{|\vec{P}_3 - \vec{P}_1(t)|} \quad (5.7)$$

si noti la dipendenza esplicita dal tempo

con:

$$\begin{cases} r_2(t) \equiv |\vec{P}_3 - \vec{P}_2(t)| = ((x - (1-\mu)\cos t)^2 + (y - (1-\mu)\sin t)^2)^{1/2} \\ r_1(t) \equiv |\vec{P}_3 - \vec{P}_1(t)| = ((x + \mu\cos t)^2 + (y + \mu\sin t)^2)^{1/2} \end{cases} \quad (5.8)$$

Poiché le forze in gioco sono centrali il problema è conservativo e vale (NOTA: si dimostra che ogni forza centrale è conservativa indipendentemente dalla dipendenza della intensità della forza dalla distanza):

$$\ddot{\vec{P}}_3 = -\vec{\nabla} V \quad \vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5.9)$$

cioè se l'intensità allora:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} \end{cases}$$

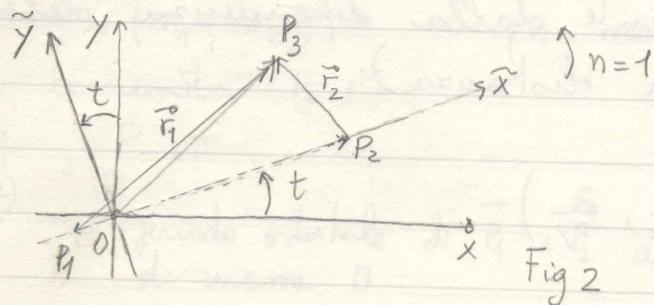
$$(\vec{\nabla} r = \vec{r}/r)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\mu}{r_2^3(t)} (x - (1-\mu)\cos t) - \frac{1-\mu}{r_1^3(t)} (x + \mu\cos t) \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{r_2^3(t)} (y - (1-\mu)\sin t) - \frac{1-\mu}{r_1^3(t)} (y + \mu\sin t) \end{cases} \quad (5.10)$$

↑
eq. del moto di $\vec{P}_3$ nel riferimento siderale di Fig. 1

Per eliminare la dipendenza esplicita dal tempo si esegue una trasformazione di coordinate anch'essa dipendente dal tempo.

Poiché la dipendenza esplicita da t viene dal fatto che $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ ruotano, semplicemente si passa nel riferimento $O\tilde{x}\tilde{y}$ solidale con $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$, cioè ruotante con velocità angolare $n=1$ attorno al centro di massa O (Oxy si chiama riferimento siderale e $O\tilde{x}\tilde{y}$ riferimento sinodico). (Ved. Fig. 2)



Nel riferimento sinodico:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = (-\mu, 0) \\ \vec{P}_2 = (1-\mu, 0) \end{cases} \quad \vec{P}_3 = (\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = (\tilde{x} + \mu, \tilde{y}) \\ \vec{r}_2 = \vec{P}_3 - \vec{P}_2 = (\tilde{x} - 1 + \mu, \tilde{y}) \end{cases} \quad (5.12)$$

Le eq. che esprimono il passaggio dalle coordinate $\tilde{x}, \tilde{y}$ alle x, y e viceversa (si tratta di una semplice rotazione) sono:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t \\ y = \tilde{x} \sin t + \tilde{y} \cos t \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos t + y \sin t \\ \tilde{y} = -x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad (5.14)$$

Un modo possibile per scrivere le eq. del moto di P_3 nel riferimento

sinodico e di partire dalle eq. di moto nel riferimento rotante (le (5.10)) usando le (5.13) e le loro derivate temporali prima e seconda per scrivere le $x, y, \ddot{x}, \ddot{y}$ in termini delle $\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}, \ddot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{y}}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\tilde{x}} \cos t - \dot{\tilde{y}} \sin t - \tilde{x} \sin t - \tilde{y} \cos t \\ \dot{y} = \dot{\tilde{x}} \sin t + \dot{\tilde{y}} \cos t + \tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} \cos t - \ddot{\tilde{y}} \sin t - 2\dot{\tilde{x}} \sin t - 2\dot{\tilde{y}} \cos t - \tilde{x} \cos t + \tilde{y} \sin t \\ \ddot{y} = \ddot{\tilde{x}} \sin t + \ddot{\tilde{y}} \cos t + 2\dot{\tilde{x}} \cos t - 2\dot{\tilde{y}} \sin t - \tilde{x} \sin t - \tilde{y} \cos t \end{cases} \quad (5.16)$$

Le (5.10) diventano allora:

$$\begin{cases} \ddot{x} \cos t - \ddot{y} \sin t - 2\dot{\tilde{x}} \sin t - 2\dot{\tilde{y}} \cos t - \tilde{x} \cos t + \tilde{y} \sin t = -\frac{\mu}{r_2^3} (\tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t - (1-\mu) \cos t) \\ \quad - \frac{1-\mu}{r_1^3} (\tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t + \mu \cos t) \\ \ddot{x} \sin t + \ddot{y} \cos t + 2\dot{\tilde{x}} \cos t - 2\dot{\tilde{y}} \sin t - \tilde{x} \sin t - \tilde{y} \cos t = -\frac{\mu}{r_2^3} (\tilde{x} \sin t + \tilde{y} \cos t - (1-\mu) \sin t) \\ \quad - \frac{1-\mu}{r_1^3} (\tilde{x} \sin t + \tilde{y} \cos t + \mu \sin t) \end{cases} \quad (5.17)$$

dove:

$$\vec{r}_1 = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = (\tilde{x} + \mu, \tilde{y}) \quad (5.18)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{P}_3 - \vec{P}_2 = (\tilde{x} - 1 + \mu, \tilde{y})$$

dalle (5.17), moltiplicando la prima per $\cos t$ e la seconda per $\sin t$, e sommando ottengo l'eq. del moto per la componente $\tilde{x}$ nel riferimento rotante. In modo analogo dalle (5.17) si ottiene

l'eq. di moto per $\tilde{y}$. Risultate:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} = 2\dot{\tilde{y}} + \tilde{x} - \frac{\mu}{r_2^3} (\tilde{x} - 1 + \mu) - \frac{1-\mu}{r_1^3} (\tilde{x} + \mu) \\ \ddot{\tilde{y}} = -2\dot{\tilde{x}} + \tilde{y} - \frac{\mu}{r_2^3} \tilde{y} - \frac{1-\mu}{r_1^3} \tilde{y} \end{cases} \quad (5.19)$$

Dalle (5.19), moltiplicando la prima per $\dot{\tilde{x}}$ e la seconda per $\dot{\tilde{y}}$ e sommando si ha:

$$\dot{\tilde{x}}\ddot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{y}}\ddot{\tilde{y}} = \tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}} - \frac{\mu}{r_2^3} [\tilde{x} - 1 + \mu]\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}} - \frac{1-\mu}{r_1^3} [\tilde{x} + \mu]\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}} \quad (5.20)$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2}{2} - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{(1-\mu)}{r_1} \right] = 0 \quad (5.21)$$

cioè:

$$C = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \left[\frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1} \right] \quad (5.22)$$

è un integrale primo del moto, noto come integrale di Jacobi. Per capire a quale grandezza fisica corrisponde si può tornare al riferimento siderale x, y usando le (5.14) e le loro derivate prime:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\tilde{x}} \cos t + \dot{\tilde{y}} \sin t - x \sin t + y \cos t \\ \dot{y} = -\dot{\tilde{x}} \sin t + \dot{\tilde{y}} \cos t - x \cos t - y \sin t \end{cases} \quad (5.23)$$

Risultate

$$C = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{r_2(t)} - \frac{(1-\mu)}{r_1(t)} - (x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (5.24)$$

word. siderale

Come si vede l'integrale di Jacobi non è l'energia (per

unità di massa) del terzo corpo in quanto contiene anche il momento angolare (per unità di massa) $\vec{J}$ ($\vec{J} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$):

$$C_{\text{sid}} = E - J$$

e in generale, se non avessimo usato unità di misura in cui il moto medio n dei primari non è 1, sarebbe:

$$C_{\text{sid}} = E - n J \quad \text{In generale} \quad C_{\text{sid}} = E - \vec{n} \cdot \vec{J} \quad (5.25)$$

Tomando a C nel riferimento sinodico (5.22) lo scrivo come:

$$C = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (5.26)$$

con

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1} \quad (5.27)$$

Deve essere:

$$C + \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0 \quad (5.28)$$

perché l'energia cinetica è sempre positiva. Allora le curve di livello della funzione $\Omega(\tilde{x}, \tilde{y})$ - per ogni valore fissato di C (e.g. una volta date le condizioni iniziali) - devono soddisfare la disuguaglianza

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq -C \quad (5.29)$$

dove l'uguale corrisponde ad energia cinetica nulla. Le curve

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = -C \quad (5.30)$$

si chiamano curve a velocità nulla (nel riferimento rotante!).

sono quelle curve che la particella può trovare ma non attraversare perché questo significherebbe avere una velocità ^{al quale} negativa. La funzione $R(\tilde{x}, \tilde{y})$ ha 3 poli, cioè assume valore infinito per $r_1=0$, per $r_2=0$ o per $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \infty$; un valore di $-C$ grande corrisponde o ad una regione attorno ad m_1 , o ad una regione attorno ad m_2 o ad una regione all' ∞ (la seconda delle condizioni iniziali) - e perciò si tratta o di un satellite di m_1 , o di un satellite di m_2 o di un oggetto che orbita attorno al baricentro di m_1, m_2 (l'origine) a grande distanza (grande rispetto ad 1 che è la distanza mutua tra m_1 ed m_2). Le regioni di moto permesso per quel valore dell'integrale di Jacobi sono quelle, tratteggiate in Fig. 3

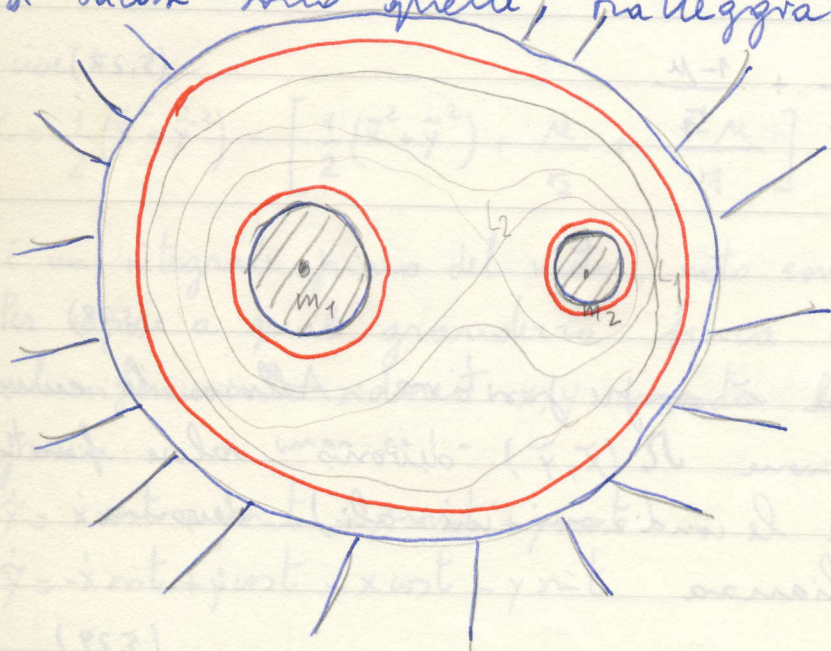
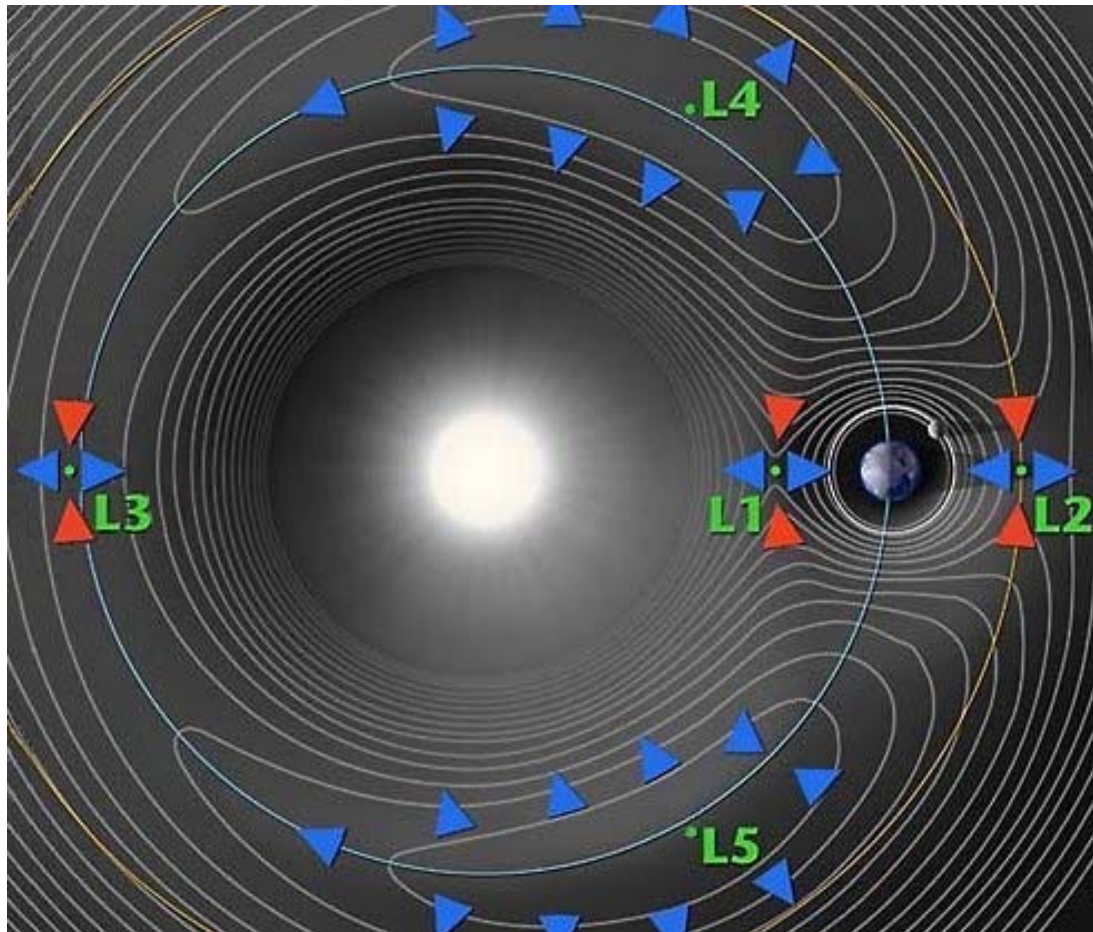


Fig. 3

Prendendo un valore più piccolo di $(-C)$ le curve si modificano come mostrato in Fig. 3. Per ogni valore dell'integrale di Jacobi per cui si ha una situazione del tipo di quella di Fig. 3 (i.e. le 3 curve - attorno ad

Punti di equilibrio Lagrangiani del problema dei 3 corpi ristretto circolare

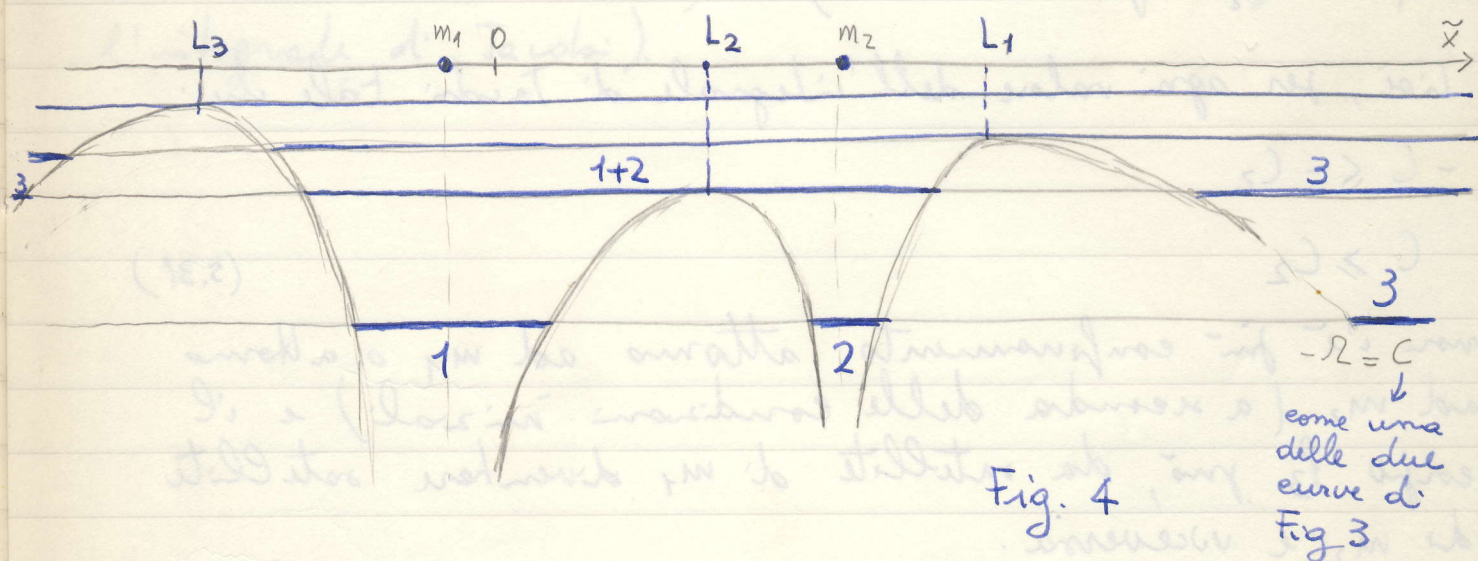


m_1 , attorno ad m_2 e all' ∞ - non si ^{combinano} possono) si può affermare che il corpo P_3 è destinato a restare in quella di queste 3 regioni in cui si trovava a $t=0$ - quando è stato calcolato il suo integrale di Tevorì - per un tempo infinito.

Ma vuole x si diminuisce ulteriormente ($-C$)? Per farcene una idea qualitativa plottiamo la funzione

$$-R(\tilde{x}, 0) = -\frac{\mu}{|\tilde{x}_1|} - \frac{1-\mu}{|\tilde{x}_2|} - \frac{1}{2} \tilde{x}^2$$

dove $\tilde{x}_1$ è la distanza di P_3 da P_1 ; $\tilde{x}_2$ la distanza di P_3 da P_2 e per semplicità abbiamo posto $\tilde{y}=0$



la Fig. 4 mostra come, all'aumentare di ($-C$) le 3 regioni si riducono a 2 e poi ad una sola. Ciò avviene in corrispondenza dei punti L_2, L_1, L_3 che sono punti di forza zero e si chiamano punti di equilibrio relativo o punti lagrangiani. È importante notare
 ↳ (nel riferimento rotante!)

che la posizione di questi punti dipende solo dal rapporto di massa e perciò si possono calcolare per qualunque coppia data di corpi; semplicemente, nel problema dei 3 corpi ristretto circolare essi assumono una particolare importanza, come mostrerò tra poco.

La Fig. 5 mostra come sono fatte le curve a velocità zero (5.30) per vari valori dell'integrale di Jacobi. In particolare la curva fatta a forma di otto che passa per il punto L_2 (chiamerò C_2 il valore dell'integrale di Jacobi in questa curva) ha grande importanza perché ha loro le due regioni U_1 ed U_2 (attorno ad m_1 ed m_2 rispettivamente).

Quindi, per ogni valore dell'integrale di Jacobi tale che:

$$-C < -C_2$$

$$C > C_2$$

(5.31)

non c'è più confinamento attorno ad m_1 o attorno ad m_2 (a seconda delle condizioni iniziali) e il corpo P_3 può, da satellite di m_1 diventare satellite di m_2 e viceversa.

Nel problema dei 3 corpi ristretto circolare si può quindi formulare un criterio di stabilità nel moto seguente. Dati i due corpi m_1 ed m_2 si calcolano il punto L_2 e il valore corrispondente

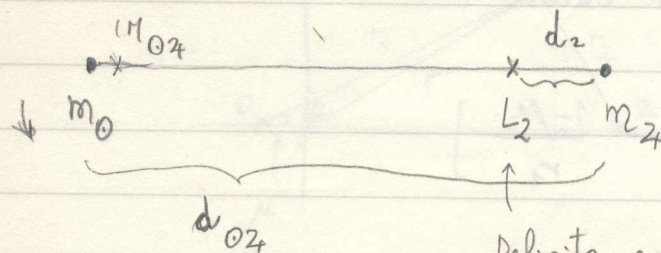
dell'integrale di Jacobi C_2 . Quindi, dato un corpo senza massa con condizioni iniziali $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0$ (nel riferimento rotante), si calcola il valore del suo integrale di Jacobi $C(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0)$. Se risulta

$$C(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \leq C_2 \quad (5.32)$$

il detto corpo x era satellite di m_1 a $t=0$ continuerà ad esserlo per sempre e così se era satellite di m_2 .

La (5.32) si chiama criterio di stabilità di Hill e vale anche (aggiungendo la terza dimensione) nel problema rotante eccolare in $\mathbb{R}^3$. (Il problema può essere tridimensionale ma m_1 ed m_2 devono continuare ad essere in orbite circolari, altrimenti non c'è più l'integrale di Jacobi).

1. Calcolo della posizione del punto di equilibrio L_2 interno tra m_0 ed m_2



$\uparrow m_2$ ruota con velocità angolare n_2 attorno al CM₀₂ centro di massa di $0+2$

Definito come punto di equilibrio, cioè punto di forza totale 0 (i.e. un punto massa che si trovi esattamente in L_2 con velocità iniziale nulla - rispetto al riferimento rotante con Giove - vi resterà indefinitamente in quanto non soggetto ad alcuna forza)

$$\frac{G m_2}{d_2^2} = \frac{3 G m_0}{d_{02}^3} d_2$$

$\uparrow$ attrazione di Giove

accelerazione mareale dovuta al Sole nel punto L_2 (Vedi pagine e note)

$$d_2^3 = \frac{m_2}{3 m_0} d_{02}^3$$

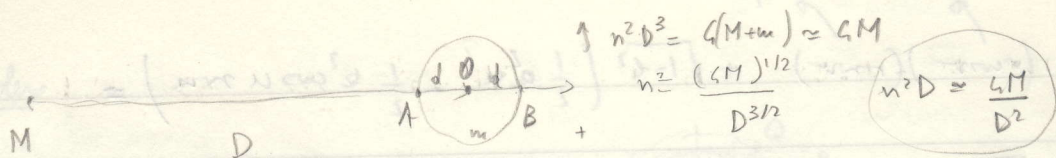
$$m_0 + m_2 = 1$$

$$d_2^3 = \frac{\mu}{3(1-\mu)} d_{02}^3 \approx \frac{\mu}{3} d_{02}^3$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_0 + m_2}$$

$$d_2 \approx d_{02} \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3}$$

TIDAL FORCES IN THE RADIAL DIRECTION ($M \gg m$, $D \gg d$)



O: $-\frac{GM}{D^2} + n^2 D = 0$ zero force point

A: $-\frac{GM}{(D-d)^2} + n^2 (D-d) = -\frac{GM}{D^2(1-\frac{d}{D})^2} + n^2 D(1-\frac{d}{D}) \approx -\frac{GM}{D^2} (1+2\frac{d}{D}) + n^2 D(1-\frac{d}{D}) \approx -\frac{GM}{D^2} + n^2 D - \frac{2GMd}{D^3} + n^2 D \frac{d}{D}$

B: $-\frac{GM}{(D+d)^2} + n^2 (D+d) = -\frac{GM}{D^2(1+\frac{d}{D})^2} + n^2 D(1+\frac{d}{D}) \approx -\frac{GM}{D^2} (1-2\frac{d}{D}) + n^2 D(1+\frac{d}{D}) \approx -\frac{GM}{D^2} + n^2 D + \frac{2GMd}{D^3} + n^2 D \frac{d}{D}$

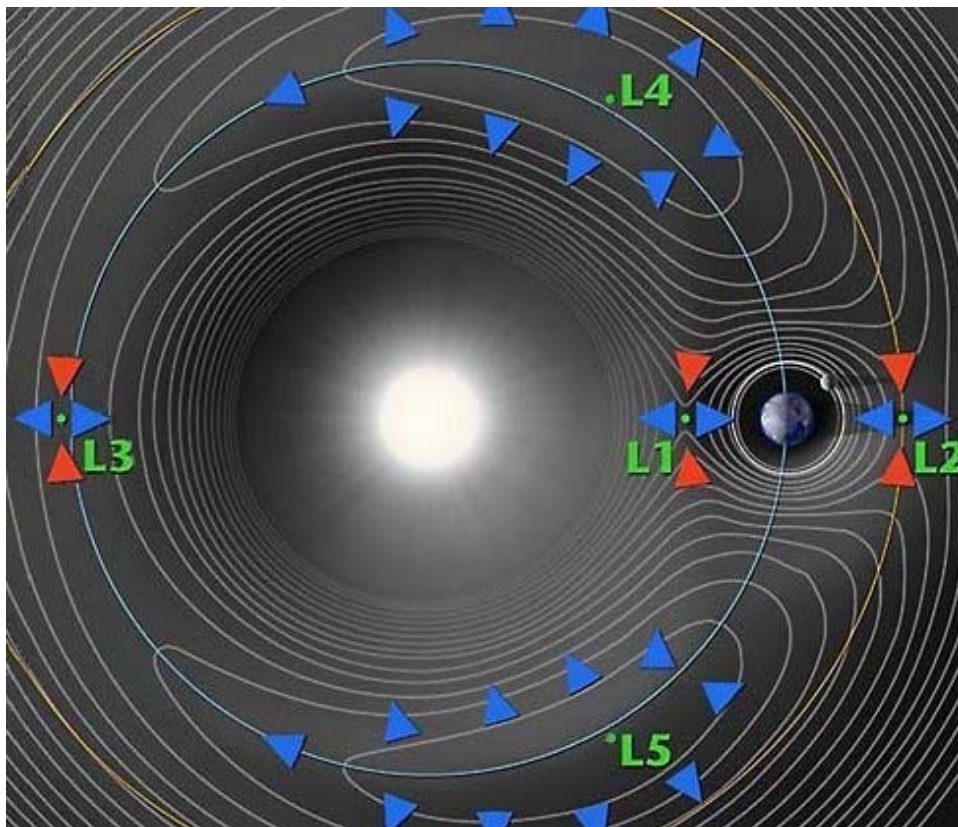
$(1+\epsilon)^{-2} \approx 1 - 2(1+\epsilon)^{-3} \cdot \epsilon \approx 1 - 2\epsilon$

$(1-\epsilon)^{-2} \approx 1 + 2\epsilon$

Occorre andare all'infinito per sfuggire all'attrazione della Terra?

- Il modello fisico di base è il problema dei 3 corpi: Terra, Sole, sonda

Approssimazioni: i) la sonda “sente” l'attrazione di Sole e Terra, ma non viceversa perché la sua massa e' trascurabile rispetto ad entrambi; ii) Sole e Terra sono puntiformi (o a simmetria sferica) e su orbite circolari (problema dei 3 corpi ristretto circolare)



Nel riferimento rotante con la Terra attorno al Sole, essi sono fermi e posso calcolare dove si può svolgere il moto della “sonda” (a seconda delle sue condizioni iniziali)

La Terra ha una sua sfera di influenza al di fuori della quale il moto della sonda è dominato dal Sole. Il suo raggio è

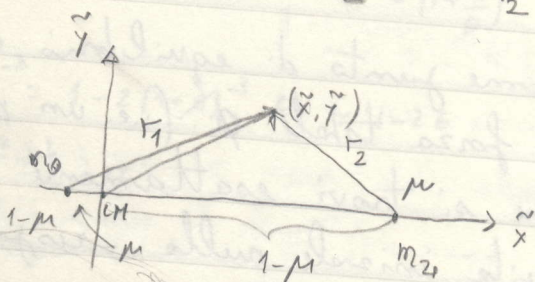
$$R_{si\oplus} \simeq d_{\oplus sole} \left(\frac{M_{\oplus}}{3M_{sole}} \right)^{1/3}$$

Per sfuggire alla Terra e andare verso altri pianeti basta arrivare al bordo della sua sfera di influenza.....

2. Calcolo del valore dell'integrale di Jacobi corrispondente al punto L_2

Abbiamo visto che nel riferimento rotante con le binarie (orbita circolare) l'integrale di Jacobi è:

$$C = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \left[\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1} \right]$$



$$m_0 + m_2 = 1$$

$$G = 1$$

$$d_{02} = 1$$

$$\begin{pmatrix} n_2 = 1 \\ P_2 = 2\pi \end{pmatrix}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_0 + m_2}$$

L_2 ha coordinate
e velocità

$$\tilde{x} = 1 - \mu - d_2, \quad \tilde{y} = 0$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\tilde{y}} = 0$$

$$\left(d_2 \approx \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \right)$$

(nel riferimento rotante con le binarie)

Quindi:

$$-C_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \mu - \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/3} \right)^2 + \frac{\mu}{(\mu/3)^{1/3}} + \frac{1-\mu}{1 - (\mu/3)^{1/3}}$$

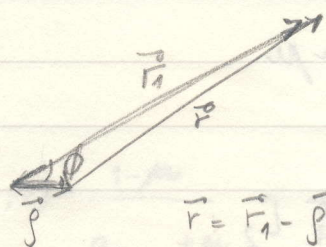
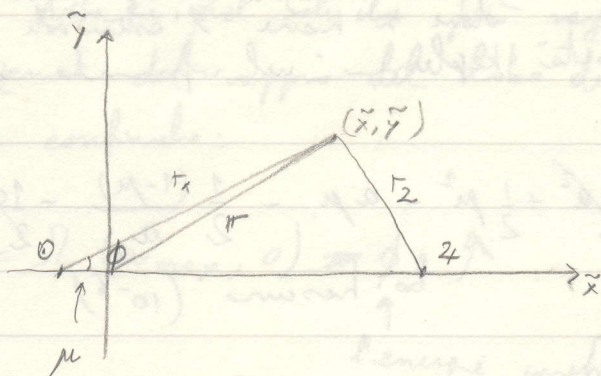
TERMINI DOMINANTE

con $\mu = 10^{-3}$ vale:

$$-C_2 = 0.432$$

$$+ 1.44 \times 10^{-2} + 1.07 = 1.52$$

3. Calcolo del valore dell' integrale di Jacobi per un asteroide inizialmente in orbita circolare di semiasse maggiore a attorno al sole



$$r^2 = r_1^2 + p^2 - 2r_1 p \cos \phi$$

$$p \equiv \mu$$

$$r^2 = r_1^2 + \mu^2 - 2r_1 \mu \cos \phi$$

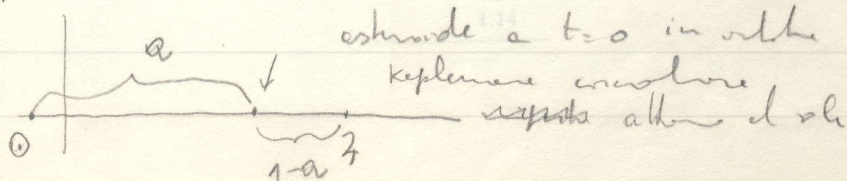
$$-C = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2} r_1^2 + \frac{1}{2} \mu^2 - \mu r_1 \cos \phi - \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$C = -\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2$$

Il moto è possibile solo per $\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq -C$

$$\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{y}) = C \quad \text{curve a velocità zero}$$

È chiaro che bisogna scegliere il valore di C



$$\begin{cases} r_1(0) = a & ; & r_2(0) = 1-a & ; & \phi(0) = 0 & & \tilde{x}(0) = a-\mu & & \tilde{y}(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 & ; & \dot{y} = \frac{(1-\mu)^{1/2}}{a^{1/2}} - a & & & & & & \end{cases}$$

$\nwarrow$ velocità lineare del riferimento nel punto dove si trova l'asteroide ($n_2 = 1$)
 $\nearrow$ velocità kepleriana nel riferimento inverso

$$-C(a) = \frac{1-\mu}{a} + \frac{\mu}{1-a} + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\mu^2 - a\mu - \frac{1}{2}\frac{(1-\mu)}{a} - \frac{1}{2}a^2 + (1-\mu)^{1/2}a^{1/2} =$$

$\nwarrow$ da lasciare (10^{-6})

$$-C(a) = \frac{1-\mu}{2a} + \frac{\mu}{1-a} + (1-\mu)^{1/2}a^{1/2} - a\mu$$

Prendiamo l'asteroide che ^{Marte} ~~Grove~~ ed L_2 :

$$0.3 \leq a \leq 0.93$$

$$(d_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3})$$

$$1-d_2 \approx 0.93$$

Tabella n. 1

TABLE I

For bodies initially in circular orbits of radius a_i , the corresponding values of the Jacobi constant are given

a_i	$J(a_i)$
0.30	2.214
0.35	2.020
0.40	1.882
0.45	1.782
0.50	1.707
0.55	1.651
0.60	1.609
0.62	1.595
0.63	1.588
0.65	1.576
0.70	1.552
0.75	1.535
0.80	1.523
0.81	1.521
0.85	1.515
0.90	1.512
0.95	1.514

CONFRONTO

CON $-C_2$

Dato l'asteroide inizialmente in orbita circolare ^{keplera} di semiasse maggiore a e integrale di Jacobi $-C(a)$, quale è la massima distanza del Sole da più ravvicinare? Calcolare il limite superiore del raggio del lobo dentro al quale l'asteroide può essere confinato:

$$-C(a) = R(a_{\max}, 0) = \phi$$

↑
l'energia cinetica è ϕ perché la distanza massima del lobo o ha sulle curve a velocità zero.

$$R(a_{\max}, 0) = \frac{1-\mu}{a_{\max} + \mu} + \frac{\mu}{1-a_{\max} + \mu} + \frac{1}{2} a_{\max}^2$$

Tabelle II e Figura 2

TABLE II

For any body, initially in circular orbit of radius a_i , the table shows the maximum value R of the size of the bounding lobe and the ratio $R(a_i)/a_i$

a_i	$R(a_i)$	$R(a_i)/a_i$
0.30	0.48	1.57
0.35	0.54	1.51
0.40	0.58	1.45
0.45	0.63	1.40
0.50	0.68	1.36
0.55	0.72	1.31
0.60	0.76	1.27
0.62	0.77	1.24
0.65	0.79	1.22
0.70	0.83	1.19
0.75	0.86	1.15
0.80	0.91	1.14
0.81	0.92	1.14

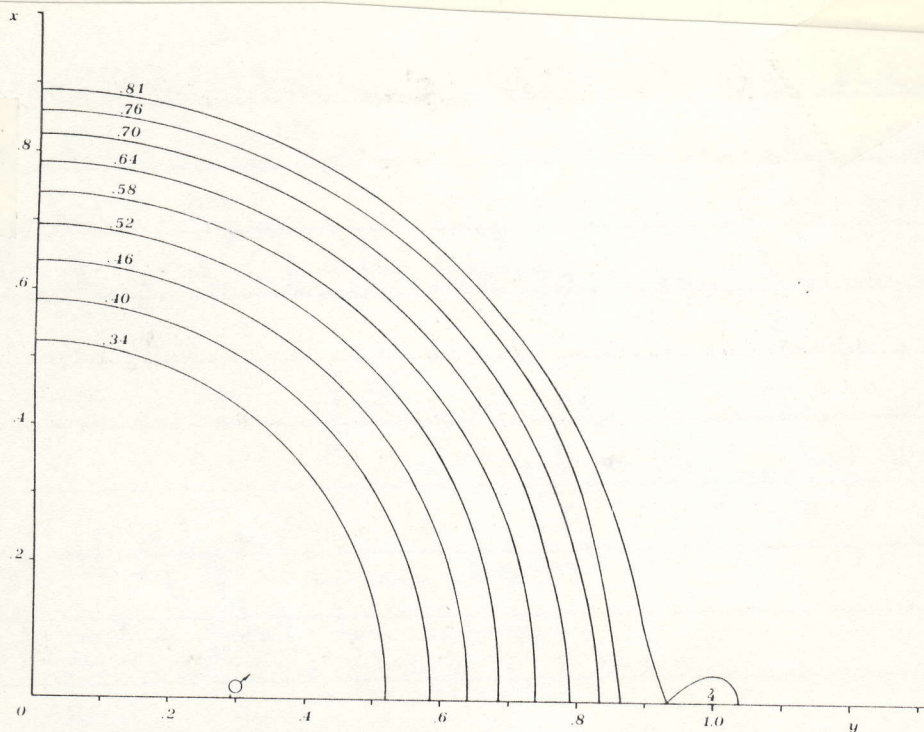


Fig. 2. Bounding lobes for the asteroids initially in circular orbits of radii $0.34 \leq a_i \leq 0.81$: each curve is labelled with the corresponding value of a_i . The reference frame is the rotating one and $a_2 = 1$.

Problemi con MATLAB

1) Dato l'integrale

$$J = -C = \underbrace{\frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}_{\Omega(\tilde{x}, \tilde{y})} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2)$$

con $\mu = 10^{-3}$

$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y})$

Disegnare le curve di livello

$$J = \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) - \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2)$$

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) - J = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq J$$

$$\boxed{\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = J}$$

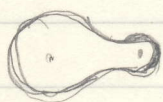
equazione delle curve a velocità zero
(rispetto al riferimento
rotante)

partire da $J_2 = 1.520$ che è il valore della curva di livello passante per L_2 e plottere le curve (nel piano $\bar{x}, \bar{y}$)

$R(\bar{x}, \bar{y}) = 1.520$ (due curve o due una curva attorno ad entrambi i corpi che combaciano gli oggetti ed il loro)

Valore > 1.520 devono dare 3 curve: una attorno al Sole, una attorno a Giove e l'altra attorno ad entrambi i loro
(confronti gli oggetti fuori)

Una valore di peso < 1.520 deve dare una curva e passano



(e sopra una che tiene gli oggetti fuori)

Diminuendo ancora Δ devono poter trovare le curve che passano per L_1 , poi per L_3 e poi le isole attorno ad L_4 ed L_5 .

2) Disegnare la curva di livello $R(\bar{x}, \bar{y}) = J_2$ nel piano $\bar{x}, \bar{y}$ e le curve di livello di un asteroide che parte con un orbita circolare attorno al Sole. ^{in un'orbita} ~~in un'orbita~~ ^{mezzogiorno} ~~mezzogiorno~~ ^e ~~e ^{Ve quindi:} ~~Ve quindi:~~~~

$$J(a) = -C(a) = \frac{1-\mu}{2a} + \frac{\mu}{1-a} + (1-\mu)^{1/2} a^{1/2} - a\mu$$

$$R(\bar{x}, \bar{y}) = J(a)$$

$$0.30 \leq a \leq 0.81 \quad (\text{Come in Fig. 2}).$$

su ogni curva indicare qual'era il valore del semiasse maggiore dell'asteroide