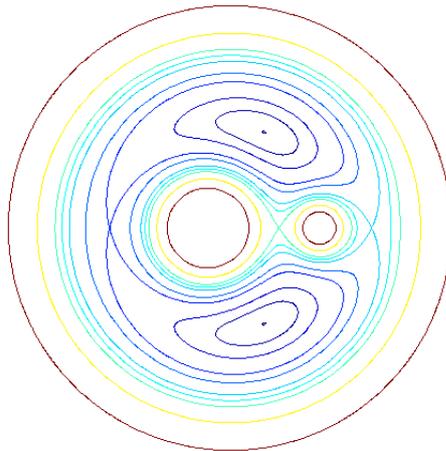


ELEMENTI DI MECCANICA CELESTE

APPUNTI DEL CORSO DELLA PROFESSORESSA ANNA MARIA NOBILI
ANNO ACCADEMICO 2011/2012



DANIELE SERRA
AGGIORNAMENTO: 2 GENNAIO 2012

1	Il problema dei due corpi	1
1.1	Richiami di meccanica classica	1
1.1.1	Principio di equivalenza	2
1.2	Formulazione del problema e riduzione	3
1.2.1	Integrabilità	4
1.2.2	L'equazione del moto	5
1.2.3	Passaggio a coordinate polari piane	6
1.3	Descrizione delle orbite	8
1.3.1	Orbite ellittiche	10
1.3.2	Orbite paraboliche	11
1.3.3	Orbite iperboliche	11
1.3.4	Le orbite dei corpi di partenza	12
1.3.5	L'energia come integrale del moto	13
1.3.6	Leggi di Keplero	16
1.4	Legge oraria	18
1.4.1	L'equazione di Keplero	19
1.4.2	Calcolo dell'istante di passaggio dal pericentro	21
1.5	L'orbita nello spazio	23
1.5.1	Elementi kepleriani	23
1.5.2	Ritorno al sistema inerziale di partenza	24
1.6	Algoritmo per il problema dei due corpi	25
1.6.1	Schema dell'algoritmo	25
1.6.2	L'algoritmo	27
2	Il problema dei tre corpi ristretto circolare	33
2.1	Formulazione del problema	33
2.2	L'equazione del moto per il terzo corpo	35
2.3	L'integrale di Jacobi	37
2.3.1	Un nuovo integrale primo	37

2.3.2	Regioni ammissibili di moto	39
2.4	Calcolo del primo punto di Lagrange	42
2.4.1	Forze mareali	42
2.4.2	Raggio d'influenza	43
2.5	Criterio di stabilità di Hill	45
3	Le maree	49
3.1	Potenziale mareale	49
3.1.1	Caso di assetto fisso	49
3.1.2	Caso corotante	52
3.2	Forze di marea	54
3.2.1	Caso ad assetto fisso	54
3.2.2	Caso corotante	57
3.3	Effetti mareali	59
3.3.1	Caso ad assetto fisso	59
3.3.2	Caso corotante	60
3.3.3	Il caso della Terra	60
3.4	Attrito delle maree	64
3.4.1	Caso della rotazione veloce	64
3.4.2	Caso della rotazione lenta	65
3.4.3	Alcune conseguenze	66
4	La Terra come corpo rigido	69
4.1	Il potenziale di uno sferoide oblato	69
4.2	La Terra come sferoide oblato	73
4.3	Moti della Terra come corpo rigido	78
4.3.1	Equazioni di Eulero	78
4.3.2	Precessione libera della Terra rigida	80
4.3.3	Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra	81
A	Moti del Sole, della Terra e della Luna	87

CAPITOLO 1

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

In questo capitolo formuleremo e risolveremo analiticamente il classico problema dei due corpi. Daremo una descrizione esplicita e dettagliata delle orbite e mostreremo come ottenere la legge oraria a partire dalle condizioni iniziali. Illustreremo anche un algoritmo per la soluzione del problema dei due corpi e riporteremo un esempio di programma.

1.1 Richiami di meccanica classica

In questa sezione riprendiamo le definizioni fondamentali di meccanica newtoniana. Innanzitutto, ricordiamo il

PRINCIPIO DI INERZIA Un corpo puntiforme di massa m , non soggetto a forze, non cambia la propria velocità.

DEFINIZIONE 1.1 - Un sistema di riferimento inerziale su \mathbb{R}^3 è il dato di una base ortonormale $\Sigma = (\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, per cui vale il principio di inerzia.

Assumeremo che in un sistema di riferimento inerziale potremo sempre misurare il tempo e le distanze.

Sarà fondamentale la

LEGGE DI NEWTON Per un corpo puntiforme di massa m , soggetto alla forza \vec{F} , vale la legge

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

dove \vec{a} è l'accelerazione del corpo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

Ogni punto di \mathbb{R}^3 può essere scritto in termini di un sistema di riferimento inerziale fissato Σ : se $P(t) \in \mathbb{R}^3$, allora esistono funzioni $x, y, z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che chiamiamo *coordinate* di $P(t)$ rispetto al sistema di riferimento Σ , tali che P sia rappresentato dal vettore

$$\vec{r}(t) := x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z = (x(t), y(t), z(t))^t.$$

DEFINIZIONE 1.2 - Sia assegnato in \mathbb{R}^3 un sistema di riferimento inerziale Σ . Sia $P \in \mathbb{R}^3$ un punto in movimento. Chiameremo *velocità* di P il vettore

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}}(t) := \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dot{y}(t)\hat{e}_y + \dot{z}(t)\hat{e}_z = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^t,$$

dove abbiamo indicato con $\dot{f}(t)$ la derivata di una funzione f della variabile t . L'*accelerazione* del punto P è il vettore

$$\vec{a} := \ddot{\vec{r}}(t) := \ddot{x}(t)\hat{e}_x + \ddot{y}(t)\hat{e}_y + \ddot{z}(t)\hat{e}_z = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))^t.$$

Ricordiamo adesso alcune quantità fondamentali della meccanica.

DEFINIZIONE 1.3 - Chiameremo *quantità di moto lineare* del corpo puntiforme P di massa m il vettore

$$\vec{p} := m\vec{v}.$$

La *quantità di moto angolare* (o *momento angolare*) del punto P è il vettore

$$\vec{J} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}.$$

Il *momento di una forza* \vec{F} applicata al punto P è il vettore

$$\vec{N} := \vec{r} \times \vec{F}.$$

OSSERVAZIONE 1.4 - Con queste notazioni, la legge di Newton diventa:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}.$$

La terza ed ultima proprietà fondamentale della meccanica newtoniana è la seguente

$$\text{EQUAZIONE DI BILANCIO} \quad \vec{N} = \dot{\vec{J}}.$$

DEFINIZIONE 1.5 - Un *integrale primo del moto* è una funzione reale che assume valore costante durante il moto.

Ricordiamo, infine, una ricorrente proprietà del prodotto vettore: se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, allora

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

1.1.1 Principio di equivalenza

Finora abbiamo parlato semplicemente di *massa* di un corpo, senza specificare nulla. In linea di principio, ogni corpo è dotato di due tipi di massa:

- una *massa inerziale* m^i , che rappresenta l'inerzia che ogni corpo oppone all'azione di una forza. In altre parole, è il coefficiente di proporzionalità tra forza e accelerazione nell'equazione di Newton;
- una *massa gravitazionale* m^g , che esprime la capacità di un corpo dotato di massa di attrarre gravitazionalmente un altro corpo. È, quindi, la massa che compare nella formula della forza di attrazione gravitazionale:

$$\vec{F} = \frac{Gm_1^g m_2^g}{r^3} \vec{r}.$$

In tutto il primo capitolo, ammetteremo la validità del seguente

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA Per ogni corpo, di qualsiasi massa e/o composizione, vale

$$\frac{m^i}{m^g} = +1.$$

Vediamo subito una conseguenza del principio di equivalenza.

PROPOSIZIONE 1.6 - *L'accelerazione di caduta libera nel campo gravitazionale terrestre è la stessa per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa e/o composizione.*

Dimostrazione. Consideriamo un corpo di massa inerziale m^i e massa gravitazionale m^g ; se M_\oplus e R_\oplus sono rispettivamente la massa e il raggio della Terra, e g è l'accelerazione acquisita dal corpo per effetto delle forze di attrazione gravitazionale, l'equazione di Newton per il moto del corpo è

$$m^i g = \frac{G m^g M_\oplus}{R_\oplus^2}.$$

Per il principio di equivalenza, questa è equivalente alla

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2},$$

per cui l'accelerazione gravitazionale non dipende dalla massa del corpo. \square

OSSERVAZIONE 1.7 - In realtà il principio di equivalenza è un'ipotesi, che sta alla base della teoria della gravitazione di Newton e della teoria della Relatività Generale di Einstein. Tutt'ora sono in corso verifiche sperimentali di tale principio, che attualmente è valido al livello di una parte su 10^{13} .

1.2 Formulazione del problema e riduzione

Nel resto del capitolo supporremo sempre assegnato un sistema di riferimento inerziale fisso Σ . Il problema dei due corpi consiste nello scrivere e risolvere le equazioni del moto per due corpi puntiformi di masse m_1 e m_2 in \mathbb{R}^3 soggetti esclusivamente alla mutua interazione gravitazionale. Supponiamo che questi due corpi siano rappresentati (figura 1.1), nel sistema di riferimento inerziale fissato, dai vettori $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$. Si tratta di determinare le componenti di questi due vettori al variare del tempo, quindi abbiamo sei incognite.

Indichiamo con \vec{r} il vettore di *posizione relativa* dei due corpi, cioè

$$\vec{r} := \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1.$$

Definiamo il *centro di massa* del sistema dei due corpi come quel punto rappresentato dal vettore

$$\vec{R}_{\text{CM}} := \frac{m_1 \vec{\rho}_1 + m_2 \vec{\rho}_2}{m_1 + m_2}.$$

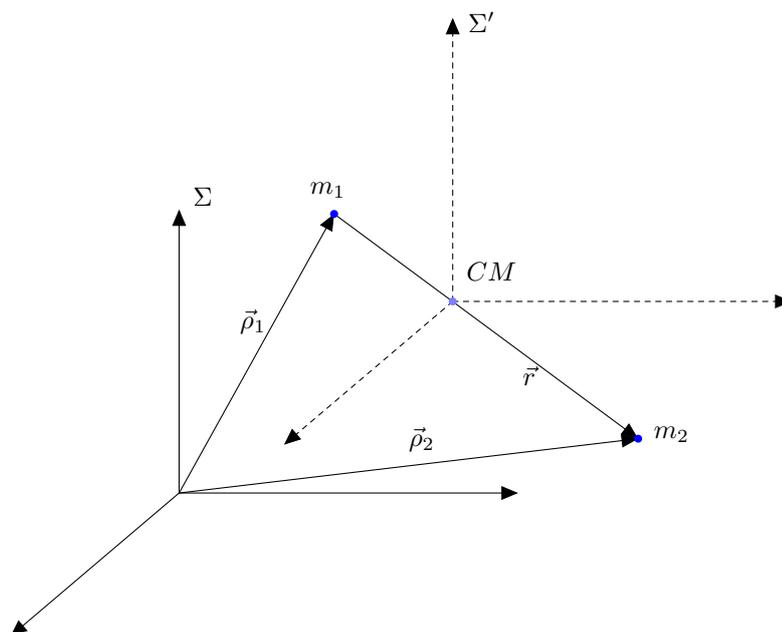


Figura 1.1: Il problema dei due corpi e il sistema del centro di massa.

1.2.1 Integrabilità

Cerchiamo di individuare alcuni integrali primi del sistema.

PROPOSIZIONE 1.8 - *La quantità di moto totale del sistema si conserva durante il moto.*

Dimostrazione. Essendo il sistema *isolato*, abbiamo che la risultante delle forze esterne \vec{F}_{est} è nulla. Poiché le forze esterne che agiscono su tutto il sistema possono essere pensate come forze che agiscono unicamente sul centro di massa, allora abbiamo che

$$0 = \vec{F}_{\text{est}} = M_{\text{tot}} \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}},$$

cioè $M_{\text{tot}} \dot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{p} = \text{cost.}$ □

OSSERVAZIONI 1.9 - - Essendo \vec{p} un vettore, esso fornisce tre integrali primi del moto.

- La forza gravitazionale non dissipa energia, dunque l'energia del sistema costituisce un quarto integrale primo.
- La forza gravitazionale è una *forza centrale* (è, cioè, parallela al vettore a cui è applicata). Per le proprietà del prodotto vettore, ne consegue che il suo momento è nullo, da cui

$$\vec{J} = \text{cost.}$$

Ciò lascia supporre che abbiamo trovato altri tre integrali primi del moto, per un totale di sette, uno in più rispetto alle incognite. In realtà, si può dimostrare che tali integrali

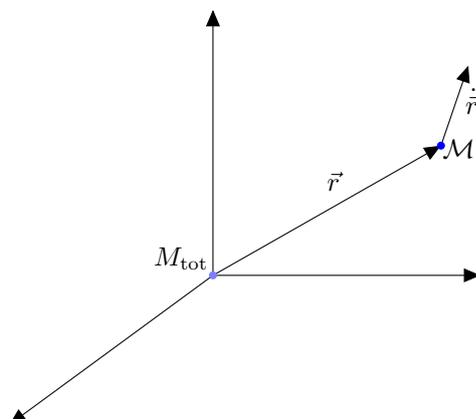


Figura 1.2: Il sistema la cui equazione del moto è rappresentata dall'equazione (1.1). Il corpo nell'origine è fisso.

primi non sono tutti indipendenti¹, ma lo sono solo sei di essi. Pertanto, per il teorema di Liouville-Arnold-Yost, il problema è integrabile.

1.2.2 L'equazione del moto

Scriviamo l'equazione del moto per il sistema. Mettiamoci nel sistema del centro di massa che, muovendosi di moto traslatorio a velocità costante, è ancora un sistema di riferimento inerziale (figura 1.1). Sia $\vec{r}_i := \vec{\rho}_i - \vec{r}$ per $i = 1, 2$ e osserviamo che

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r},$$

cioè la loro mutua distanza è espressa dallo stesso vettore. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per m_2 , la seconda per m_1 e sottraendo la prima alla seconda, otteniamo:

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}.$$

Definiamo la *massa ridotta* del sistema $\mathcal{M} := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e otteniamo l'equazione

$$\mathcal{M} \ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mathcal{M}M_{tot}}{r^3} \vec{r}. \quad (1.1)$$

¹In un senso che può essere definito rigorosamente.

OSSERVAZIONE 1.10 - La (1.1) rappresenta l'equazione del moto di un sistema di due corpi puntiformi di masse \mathcal{M} e M_{tot} , soggette alla mutua attrazione gravitazionale, con il corpo di massa M_{tot} fisso nell'origine del sistema di riferimento e quello di massa \mathcal{M} che si muove a distanza \vec{r} dal primo (figura (1.2)).

Vale la pena osservare che quello appena ottenuto è un altro problema, chiamato *problema ridotto*, che, nel caso in cui $m_2 \ll m_1$, costituisce un'approssimazione del problema originario².

Sfruttiamo, ora, il fatto che il momento angolare è un integrale primo per ridurre ulteriormente il numero di gradi di libertà del sistema.

PROPOSIZIONE 1.11 - *Il moto del problema dei due corpi ridotto avviene nel piano che contiene $\vec{r}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$.*

Dimostrazione. Abbiamo già notato che il momento angolare si conserva, pertanto

$$\vec{J} = \mathcal{M}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{cost.}$$

Date le condizioni iniziali $\vec{\rho}_1(0), \vec{\rho}_2(0), \dot{\vec{\rho}}_1(0), \dot{\vec{\rho}}_2(0)$, individuiamo i valori $\vec{r}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$ e, in particolare, abbiamo che

$$\vec{J} = \vec{J}(0) = \mathcal{M}\vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0).$$

La direzione di \vec{J} resta costante e si mantiene ortogonale al piano π generato da $\vec{r}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$; essendo \vec{J} sempre ortogonale a \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$, segue che \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$ saranno sempre contenuti in π , cioè il moto si svolge necessariamente in questo piano. \square

Grazie alla precedente proposizione, abbiamo ottenuto che la (1.1) è in realtà un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine in due incognite. Abbiamo ridotto il problema originario da sei a due incognite.

1.2.3 Passaggio a coordinate polari piane

Poiché il moto si svolge nel piano ortogonale al vettore momento angolare, possiamo mettere coordinate su questo piano ed individuare un sistema di riferimento ortonormale (\hat{e}_X, \hat{e}_Y) , dove \hat{e}_X punta in direzione delle X crescenti (e analogamente \hat{e}_Y). Come vedremo, conviene adottare un diverso sistema di assi coordinati, a cui sono associate le cosiddette *coordinate polari* (figura 1.3). Definiamo, pertanto, i vettori adimensionali

$$\hat{e}_r := (\cos \theta, \sin \theta), \quad \hat{e}_\theta := (-\sin \theta, \cos \theta),$$

dove θ è l'angolo, misurato in radianti, che il vettore \vec{r} forma con il versore \hat{e}_X , considerato crescente in senso antiorario³. La direzione di \hat{e}_r viene detta direzione *radiale*, mentre quella di \hat{e}_θ viene detta direzione *trasversa*.

OSSERVAZIONE 1.12 - Osserviamo che tale sistema di riferimento non è inerziale, quindi non valgono i tre principi della meccanica classica. In particolare, nella legge di Newton interverranno le cosiddette *forze inerziali*. Noi ci limiteremo ad effettuare il cambio di variabili e il passaggio al riferimento non inerziale sarà automatico.

Nelle nuove coordinate, abbiamo che

²Come, ad esempio, succede per il moto del sistema Terra-LAGEOS.

³Solitamente, un angolo misurato a partire dall'asse delle X viene chiamato *longitudine*.

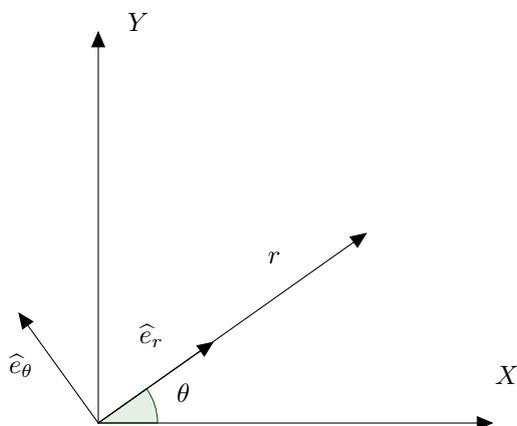


Figura 1.3: Il sistema di riferimento delle coordinate polari piane.

- $\vec{r} = r\hat{e}_r$;
- $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$;
- $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\hat{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$.

La (1.1) diventa, allora,

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_{\text{tot}}}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Se indichiamo con \vec{j} il *momento angolare per unità di massa*, cioè il vettore \vec{J}/M , allora abbiamo che

$$\vec{j} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r\hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}(\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta) =: r^2\dot{\theta}\hat{e}_z.$$

Poiché la seconda equazione del moto può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

allora otteniamo che $r^2\dot{\theta}$, che è il modulo del momento angolare per unità di massa, è un integrale primo del moto: $j = r^2\dot{\theta} = \text{cost}$. Sostituendo nella prima equazione, otteniamo

$$\ddot{r} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM_{\text{tot}}}{r^2}. \quad (1.2)$$

Ci siamo ricondotti ad una equazione differenziale in una incognita.

1.3 Descrizione delle orbite

Osserviamo che per la riduzione del problema non abbiamo mai usato il fatto che la forza fosse esattamente quella gravitazionale: tutto quello che abbiamo detto vale, perciò, per *forze centrali* qualsiasi.

La particolare forma della forza gravitazionale, cioè che decade come il reciproco del quadrato del raggio, sarà essenziale per la descrizione delle orbite. Per far ciò, avremo bisogno della seguente

DEFINIZIONE 1.13 - Chiamiamo *vettore di Lenz* il seguente vettore

$$\vec{e} := \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \dot{\vec{r}} \times \vec{j} - \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.3)$$

OSSERVAZIONI 1.14 - - Il vettore di Lenz è adimensionale;

- Il vettore di Lenz è un integrale primo del moto⁴:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}} &= \frac{1}{GM_{\text{tot}}} (\ddot{\vec{r}} \times \vec{j}) + \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\dot{\vec{j}}}_{=\vec{0}} - \dot{\hat{e}}_r \\ &= \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \left(-\frac{GM_{\text{tot}}}{r^3} \vec{r} \times \vec{j} \right) - \dot{\hat{e}}_r \\ &= -\frac{1}{r^3} (r\hat{e}_r \times r^2\dot{\theta}\hat{e}_z) - \dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ &= \dot{\theta}\hat{e}_\theta - \dot{\theta}\hat{e}_\theta = \vec{0}. \end{aligned}$$

Poiché il vettore di Lenz appartiene al piano generato dai versori \hat{e}_r e \hat{e}_θ ed è fisso, allora è ragionevole pensare che sia più semplice descrivere il moto in un riferimento in cui il primo asse è quello dato dalla direzione del vettore di Lenz (figura 1.4). Sia, dunque, δ l'angolo compreso tra l'asse \hat{e}_X e la direzione di \vec{e} e definiamo *anomalia vera* l'angolo $v(t) := \theta(t) - \delta$ tra il vettore di Lenz e il raggio vettore. Osserviamo preliminarmente che $\dot{v}(t) = \dot{\theta}(t)$ e che $\hat{e}_\theta = \hat{e}_v$.

Studiamo il moto nel sistema di riferimento dove il primo asse, che chiameremo asse delle x , è dato dalla direzione del vettore di Lenz, e il secondo, che chiameremo asse delle y , è dato dalla direzione del versore \hat{e}_\perp ottenuto ruotando \vec{e} di un angolo di $\pi/2$ in senso antiorario.

TEOREMA 1.15 - *L'orbita del problema dei due corpi ridotto è data dalla seguente curva in forma polare, nelle coordinate del modulo del prodotto vettore e dell'anomalia vera:*

$$r(t) = \frac{j^2/GM_{\text{tot}}}{1 + e \cos v(t)}. \quad (1.4)$$

Dimostrazione. È ragionevole partire dalla definizione di coseno dell'angolo $v(t)$, che risulta essere

$$\hat{e}_r \cdot \vec{e} = e \cos v.$$

⁴Dipendente dai precedenti, però.

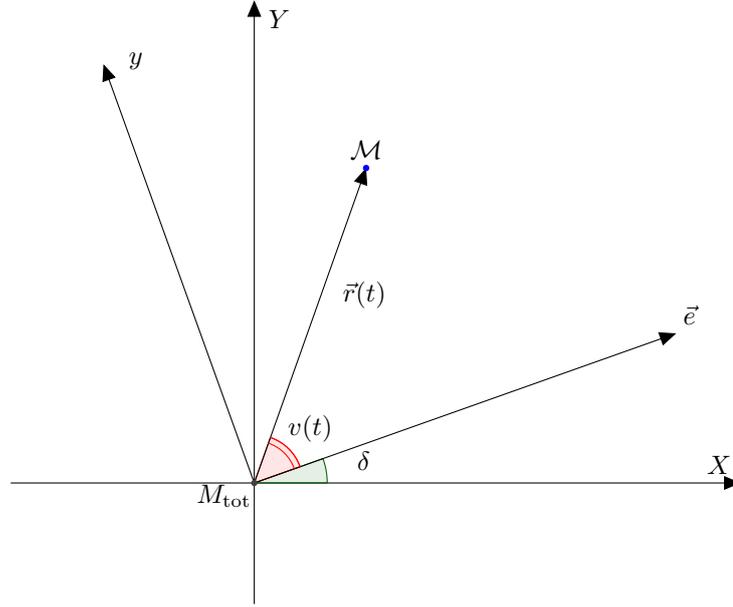


Figura 1.4: Il sistema di riferimento del vettore di Lenz.

Utilizzando le osservazioni sull'anomalia e le regole del prodotto vettore, il primo membro risulta essere uguale a:

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_r \cdot \vec{e} &= \hat{e}_r \cdot \left(\frac{1}{GM_{\text{tot}}} \dot{\vec{r}} \times \vec{j} - \hat{e}_r \right) = \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \hat{e}_r \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{j}) - 1 \\
 &= \frac{r^2 \dot{v}}{GM_{\text{tot}}} \hat{e}_r \cdot (\dot{\vec{r}} \times \hat{e}_z) - 1 = \frac{r^2 \dot{v}}{GM_{\text{tot}}} \hat{e}_z \cdot (\hat{e}_r \times \dot{\vec{r}}) - 1 \\
 &= \frac{r^2 \dot{v}}{GM_{\text{tot}}} \hat{e}_z \cdot (\hat{e}_r \times (r \dot{\hat{e}}_r + r \dot{v} \hat{e}_v)) - 1 = \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM_{\text{tot}}} - 1.
 \end{aligned}$$

Poiché abbiamo già osservato che $\dot{v} = \dot{\theta} = j/r^2$, allora arriviamo all'equazione desiderata:

$$r(t) = \frac{j^2/GM_{\text{tot}}}{1 + e \cos v(t)}.$$

□

DEFINIZIONE 1.16 - Il *semilato retto* dell'orbita del problema dei due corpi ridotto è

$$p := \frac{j^2}{GM_{\text{tot}}}.$$

OSSERVAZIONI 1.17 - - La quantità j^2/GM_{tot} è una lunghezza ed è il valore di r quando l'anomalia vale $\pi/2$.

- La (1.4) descrive una conica di eccentricità e :

$$r = p - er \cos v \implies (x^2 + y^2)^{1/2} = p - ex \implies x^2 + y^2 = (p - ex)^2.$$

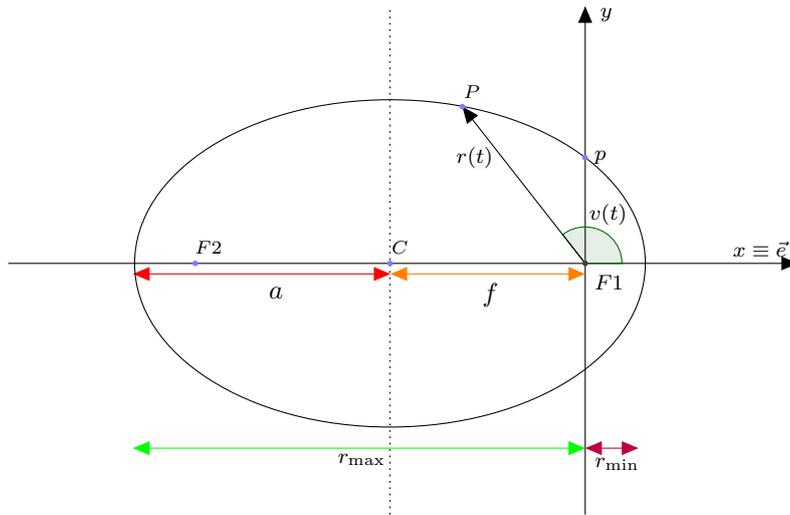


Figura 1.5: Esempio di orbita ellittica.

In particolare, se $e \in [0, 1)$ abbiamo un'ellisse, se $e = 1$ abbiamo una parabola e se $e > 1$ abbiamo un'iperbole.

- Poiché la funzione coseno è pari, allora l'asse $v(t) = 0$ (cioè quello dato dalla direzione del vettore di Lenz) è asse di simmetria per la curva descritta dalla (1.4).

DEFINIZIONE 1.18 - Definiamo *pericentro* dell'orbita il punto di minima distanza r_{\min} dal centro di rotazione e *apocentro* dell'orbita il punto di massima distanza r_{\max} , se esiste, dal centro di rotazione.

1.3.1 Orbite ellittiche

Se $e \in [0, 1)$, la conica definita dalla (1.4) è un'ellisse (figura 1.5) di cui l'origine occupa uno dei due fuochi. In questo caso, possiamo definire l'*estensione dell'orbita* come

$$2a := r(v = 0) + r(v = \pi) = \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{1 - e^2}.$$

Poiché $j^2 = pGM_{\text{tot}}$, segue che

$$j^2 = GM_{\text{tot}}a(1 - e^2). \quad (1.5)$$

La lunghezza a rappresenta, dunque, il semiasse maggiore dell'orbita. Possiamo distinguere altre grandezze geometriche legate all'ellisse:

- La *distanza focale* f , cioè la distanza del centro da uno dei due fuochi. Vale $f = ae$.
- Il *semiasse minore* b , di valore $a\sqrt{1 - e^2}$.
- Il *pericentro*, di distanza $r_{\min} = a(1 - e)$.
- L'*apocentro*, di distanza $r_{\max} = a(1 + e)$.

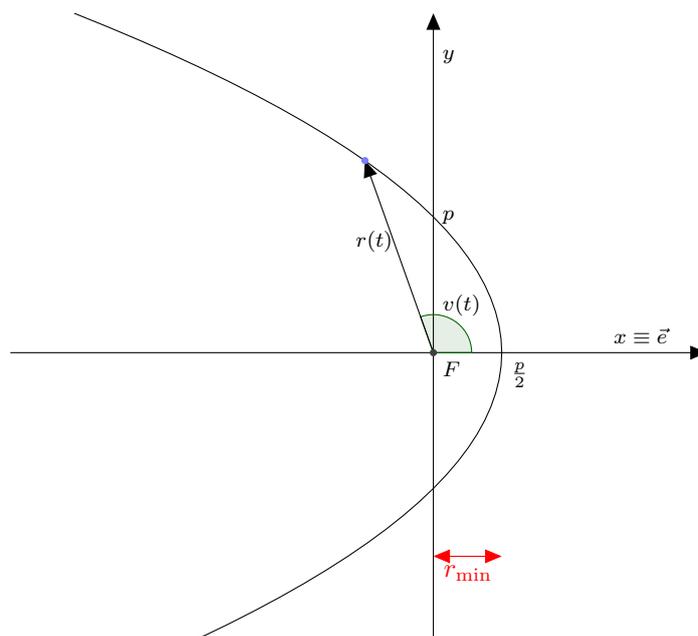


Figura 1.6: Esempio di orbita parabolica.

1.3.2 Orbite paraboliche

Se $e = 1$, l'orbita è una parabola (figura 1.6), il cui fuoco è l'origine degli assi. Questo si vede facilmente dall'equazione in forma cartesiana, che diventa

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}.$$

Il pericentro dell'orbita dista dal fuoco $r_{\min} = p/2$.

1.3.3 Orbite iperboliche

Se $e > 1$, l'orbita è un'iperbole (figura 1.7), di cui l'origine occupa uno dei due fuochi. Per disegnarla, basta conoscere la distanza del pericentro, che è facile vedere che vale

$$r_{\min} = p/(1 + e) < p/2,$$

e l'angolo d'inclinazione degli asintoti. Tale angolo, che indichiamo con v_{asin} , deve soddisfare la relazione

$$1 + e \cos v_{\text{asin}} = 0,$$

ottenuta mandando r all'infinito nell'equazione della conica. Nel caso dell'orbita parabolica, risulta ancora ben definito il numero $a := p/(1 - e^2)$, che però è negativo. Il suo modulo, $|a|$, rappresenta il semiasse maggiore dell'iperbole, cioè la distanza tra il centro dell'iperbole e il pericentro. La distanza focale f , risulta quindi essere:

$$f = r_{\min} + |a| = |a|(e - 1) + |a| = |a|e.$$

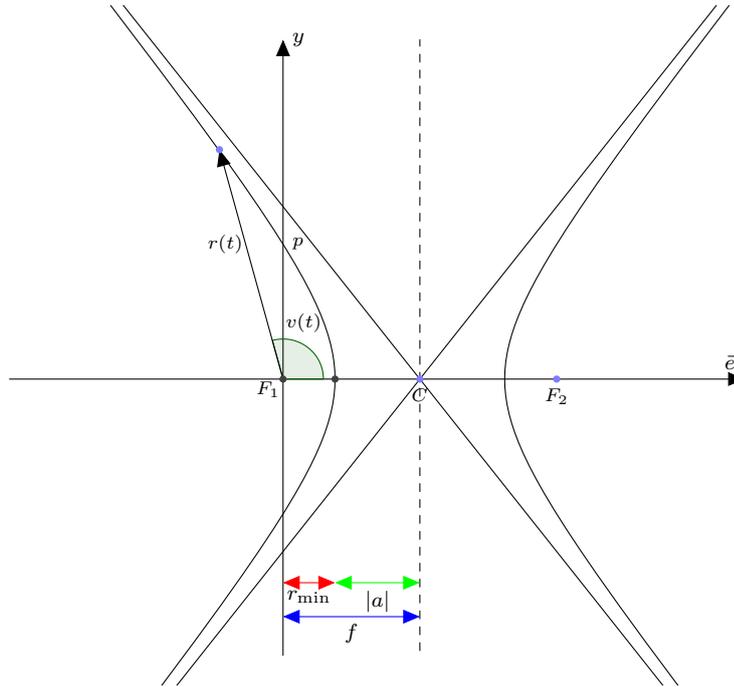


Figura 1.7: Un esempio di orbita iperbolica.

1.3.4 Le orbite dei corpi di partenza

Date le condizioni iniziali, abbiamo visto come determinare completamente l'orbita del problema ridotto: tramite

$$\vec{j} = \vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0)$$

ci si calcola il modulo di \vec{j} e si utilizza la seguente

$$\vec{e} = \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \dot{\vec{r}}(0) \times \vec{j} - \frac{\vec{r}(0)}{r(0)}$$

per calcolare l'eccentricità e . Infine, si usa la fondamentale

$$j^2 = GM_{\text{tot}} a (1 - e^2)$$

per ricavare il semiasse maggiore a . Come fare per risalire alle orbite dei corpi di partenza?

PROPOSIZIONE 1.19 - *Le orbite dei corpi del problema originario sono coniche di semiassi maggiori a_1 e a_2 , con $a = a_1 + a_2$ ed eccentricità e .*

Dimostrazione. Osserviamo, anzitutto, che nel sistema del centro di massa

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M_{\text{tot}}} = \vec{0},$$

dunque

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2. \quad (1.6)$$

Questa, unita a $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, ci dà

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \frac{m_1}{M_{\text{tot}}}\vec{r}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Derivando, otteniamo anche

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{M_{\text{tot}}}\dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 = \frac{m_1}{M_{\text{tot}}}\dot{\vec{r}}. \end{cases}$$

Si osservi che \vec{r} , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 sono allineati, così come i vettori velocità. Dalla prima delle (1.7), passando ai moduli, si ottiene:

$$r_1 = \frac{m_2}{M_{\text{tot}}}r = \frac{j^2 m_2 / GM_{\text{tot}}^2}{1 + e \cos v},$$

cioè l'orbita del corpo di massa m_1 è una conica di eccentricità e , asse di simmetria il vettore di Lenz, semilato retto

$$p_1 := \frac{j^2 m_2}{GM_{\text{tot}}^2}.$$

Con lo stesso ragionamento, ma sfruttando la seconda equazione, si ottiene l'analogo per il secondo corpo, con

$$p_2 := \frac{j^2 m_1}{GM_{\text{tot}}^2}.$$

Osservando che

$$a_1(1 - e^2) + a_2(1 - e^2) = p_1 + p_2 = p = a(1 - e^2),$$

si ottiene la tesi. □

1.3.5 L'energia come integrale del moto

L'energia del sistema ridotto è la seguente quantità, somma dell'energia cinetica e potenziale:

$$\mathcal{E} := \frac{1}{2}\mathcal{M}v^2 - \frac{GM_{\text{tot}}\mathcal{M}}{r}.$$

Analogamente, possiamo scrivere l'energia per unità di massa ridotta:

$$E := \frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r}.$$

Cerchiamo un modo per collegare questo integrale primo con quelli caratteristici delle orbite: il semiasse maggiore e l'eccentricità.

PROPOSIZIONE 1.20 - *L'energia E del problema ridotto dipende esclusivamente dal semiasse maggiore a mediante la formula*

$$E = -\frac{GM_{\text{tot}}}{2a}. \quad (1.8)$$

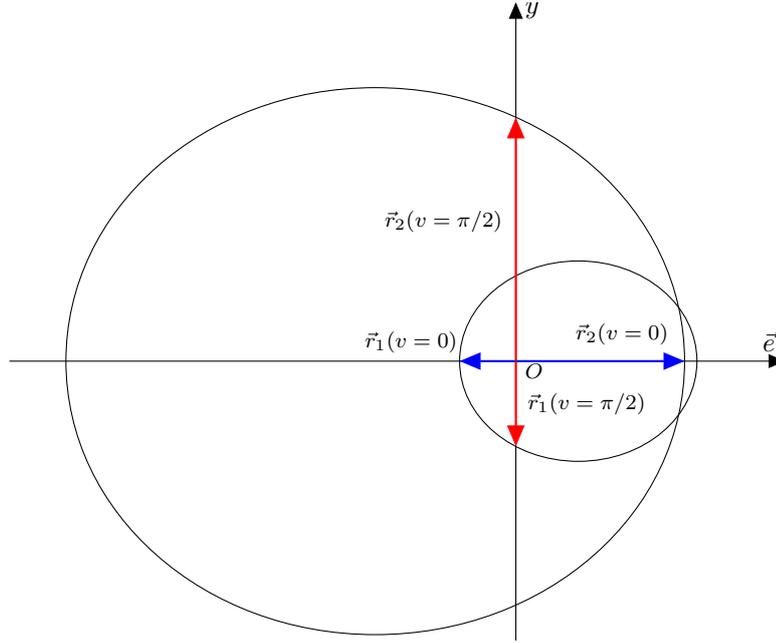


Figura 1.8: Le orbite del problema dei due corpi e posizioni dei raggi vettori nel pericentro e a $v = \pi/2$.

Dimostrazione. Calcoliamo il numero e^2 .

$$\begin{aligned}
 e^2 &= \vec{e} \cdot \vec{e} = \left\{ \frac{1}{GM_{\text{tot}}} (\dot{\vec{r}} \times \vec{j}) - \hat{e}_r \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{GM_{\text{tot}}} [(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{v}\hat{e}_v) \times (r^2\dot{v}\hat{e}_z)] - \hat{e}_r \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{GM_{\text{tot}}} (r^3\dot{v}^2\hat{e}_r - r^2\dot{r}\dot{v}\hat{e}_v) - \hat{e}_r \right\}^2 \\
 &= \left\{ \left(\frac{r^3\dot{v}^2}{GM_{\text{tot}}} - 1 \right) \hat{e}_r - \frac{r^2\dot{r}\dot{v}}{GM_{\text{tot}}} \hat{e}_v \right\}^2 \\
 &= \left(\frac{r^3\dot{v}^2}{GM_{\text{tot}}} - 1 \right)^2 + \frac{r^4\dot{r}^2\dot{v}^2}{G^2M_{\text{tot}}^2}.
 \end{aligned}$$

Sviluppando i conti e usando il fatto che $r^2\dot{v} = j^2$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 e^2 &= 1 + \frac{j^2}{G^2M_{\text{tot}}^2} \underbrace{(\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2)}_{=\dot{r}^2} - 2\frac{j^2}{GM_{\text{tot}}r} \\
 &= 1 + \frac{2j^2}{G^2M_{\text{tot}}^2} \left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \right).
 \end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo ottenuto

$$e^2 = 1 + \frac{2j^2}{G^2 M_{\text{tot}}^2} E.$$

Per la (1.5), questa diventa

$$e^2 - 1 = \frac{2a(1 - e^2)}{GM_{\text{tot}}} E.$$

Se $e \neq 1$, si divide e si ottiene la tesi. \square

Riassumendo, possiamo classificare le orbite del problema dei due corpi in termini di energia, eccentricità e semiasse maggiore:

- Se $E > 0$, $a < 0$ e $e > 1$, l'orbita è iperbolica.
- Se $E = 0$, $a \rightarrow \infty$ e $e = 1$, l'orbita è parabolica.
- Se $E < 0$, $a > 0$ e $e \in [0, 1)$, l'orbita è ellittica.

OSSERVAZIONE 1.21 - Uguagliando le due espressioni dell'energia di cui disponiamo, otteniamo

$$v^2 = GM_{\text{tot}} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.9)$$

Siamo cioè, in grado di calcolare la velocità del vettore di mutua distanza, note le sue coordinate. In particolare, nel caso $a < 0$ possiamo calcolare la velocità all'infinito:

$$v_{\infty}^2 = \frac{GM_{\text{tot}}}{|a|} = 2E.$$

Un corpo che si allontana su un'orbita iperbolica arriva all'infinito con velocità non nulla. Invece, un corpo che si muove di orbita parabolica ha energia nulla, dunque la sua energia cinetica è sempre uguale all'energia potenziale. Ne segue che all'infinito possiederà energia cinetica nulla, da cui velocità nulla.

Potenziale efficace

Usando gli integrali del moto, possiamo scrivere l'energia in termini di r e \dot{r} . Ricordando che $j = r^2 \dot{\nu}$,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\nu}^2) - \frac{GM_{\text{tot}}}{r} \\ &= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{j^2}{2r^2} - \frac{GM_{\text{tot}}}{r}}_{=: \mathcal{V}_{\text{eff}}}. \end{aligned}$$

Quest'ultima rappresenta l'energia di un altro problema, con energia potenziale il *potenziale efficace* \mathcal{V}_{eff} . Possiamo classificare le orbite disegnando un grafico di \mathcal{V}_{eff} e considerandone i vari livelli.

Si osserva, facendo dei ragionamenti sull'energia, che le orbite con energia negativa si svolgono tra i valori r_{min} e r_{max} individuati nel grafico (figura 1.9), mentre le altre orbite si svolgono tra un valore r_{min} e l'infinito.

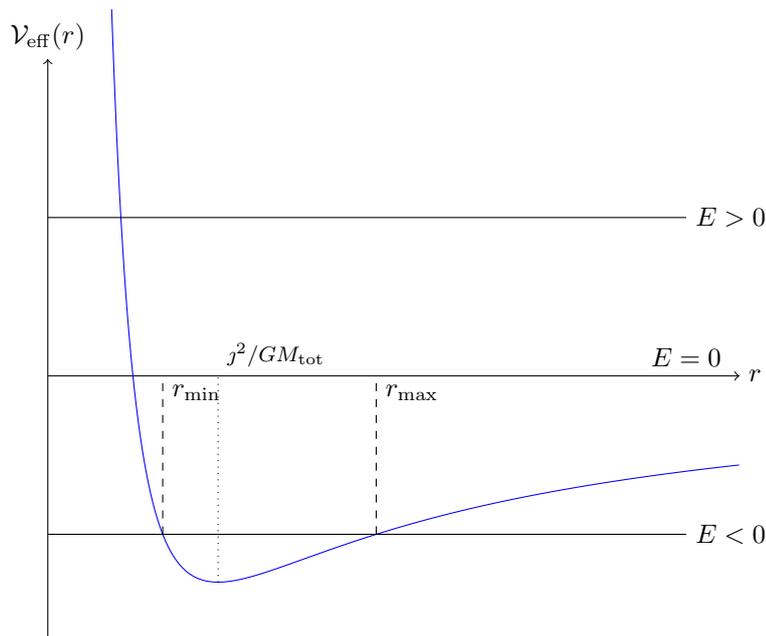


Figura 1.9: Grafico della funzione \mathcal{V}_{eff} .

1.3.6 Leggi di Keplero

In questa sezione tratteremo le classiche leggi di Keplero, nella formulazione originale e nel corrispondente linguaggio moderno.

Prima legge

La prima legge di Keplero (1608) recita così:

“L’orbita descritta da un pianeta è un’ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.”

Ci accorgiamo che abbiamo già ottenuto questa legge con il teorema (1.15), in cui il Sole è il corpo più massivo e il pianeta quello meno massivo. Abbiamo già notato che questa situazione è approssimata dal problema ridotto: si può pensare al Sole come fisso e al pianeta come il corpo che vi ruota attorno.

Seconda legge

La seconda legge (1609) è la seguente:

“Il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali.”

Formalizziamo e dimostriamo quest’ultimo enunciato. Innanzitutto osserviamo che (figura 1.10) l’area del settore sotteso dall’arco d’ellisse percorso dal corpo nel tempo (t_0, t) è data dalla

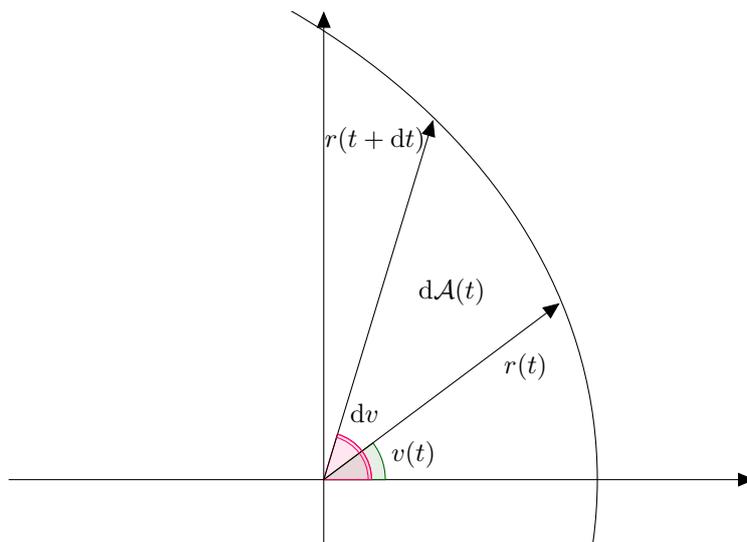


Figura 1.10: L'area di un settore sotteso da un arco d'ellisse.

formula

$$\mathcal{A}(t) := \int_{t_0}^t \frac{r^2(t')}{2} \dot{v}(t') dt'.$$

DEFINIZIONE 1.22 - La *velocità areolare* è l'area spazzata nell'unità di tempo.

Con queste notazioni, la seconda legge diventa il seguente

TEOREMA 1.23 (SECONDA LEGGE DI KEPLERO) - La *velocità areolare* è costante.

Dimostrazione. La velocità areolare è la derivata prima dell'area, perciò, grazie alle regole di derivazione dell'integrale:

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{v} = \frac{j}{2}.$$

La tesi segue dalla conservazione del momento angolare. □

Come conseguenza della seconda legge di Keplero abbiamo che nei pressi del pericentro il corpo deve avere velocità in modulo maggiore dell'apocentro⁵.

Terza legge

Enunciamo la terza legge di Keplero, nella formulazione del 1619.

“I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.”

Dapprima verifichiamo che il moto è effettivamente periodico.

⁵In realtà questo era già chiaro da prima, grazie alla $\dot{v} = j/r^2$.

PROPOSIZIONE 1.24 - Se $e \in [0, 1)$, il moto del problema ridotto è periodico.

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che, se esiste $T > 0$ tale che $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$, allora anche $\dot{\vec{r}}(t+T) = \dot{\vec{r}}(t)$. Questo è chiaro dalla conservazione del momento angolare: infatti,

$$\vec{r}(t+T) \times \dot{\vec{r}}(t+T) = \vec{j}(t+T) = \vec{j}(t) = \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t+T) \times \dot{\vec{r}}(t),$$

da cui $\dot{\vec{r}}(t+T) = \dot{\vec{r}}(t)$. □

TEOREMA 1.25 (TERZA LEGGE DI KEPLERO) - Il periodo dell'orbita del problema dei due corpi ridotto è proporzionale al cubo del semiasse maggiore:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{tot}}}. \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Il periodo dell'orbita può essere espresso dall'area dell'ellisse divisa per la velocità areolare. Dunque, ricordando la (1.5),

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi ab}{\dot{A}} = \frac{2\pi ab}{j} \\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{GM_{\text{tot}}a(1-e^2)}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{GM_{\text{tot}}a(1-e^2)}} \\ &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_{\text{tot}}}}, \end{aligned}$$

da cui, elevando al quadrato, otteniamo la tesi. □

DEFINIZIONE 1.26 - Definiamo la *velocità angolare media* come

$$n = \frac{2\pi}{P}.$$

OSSERVAZIONI 1.27 - - Spesso riscriveremo la terza legge di Keplero in termini di velocità angolare media:

$$n^2 a^3 = G(m_1 + m_2).$$

- Un altro modo di esprimere la velocità angolare media, in termini di energia per unità di massa ridotta, è

$$n = \frac{(-2E)^{3/2}}{G(m_1 + m_2)}.$$

1.4 Legge oraria

Abbiamo dato una descrizione approfondita delle orbite del problema dei due corpi; sappiamo anche calcolare la velocità lineare e la velocità angolare a partire dalla posizione, ma non conosciamo ancora la legge oraria del moto. Vorremmo, cioè, una relazione che leghi il modulo del raggio vettore e il tempo.

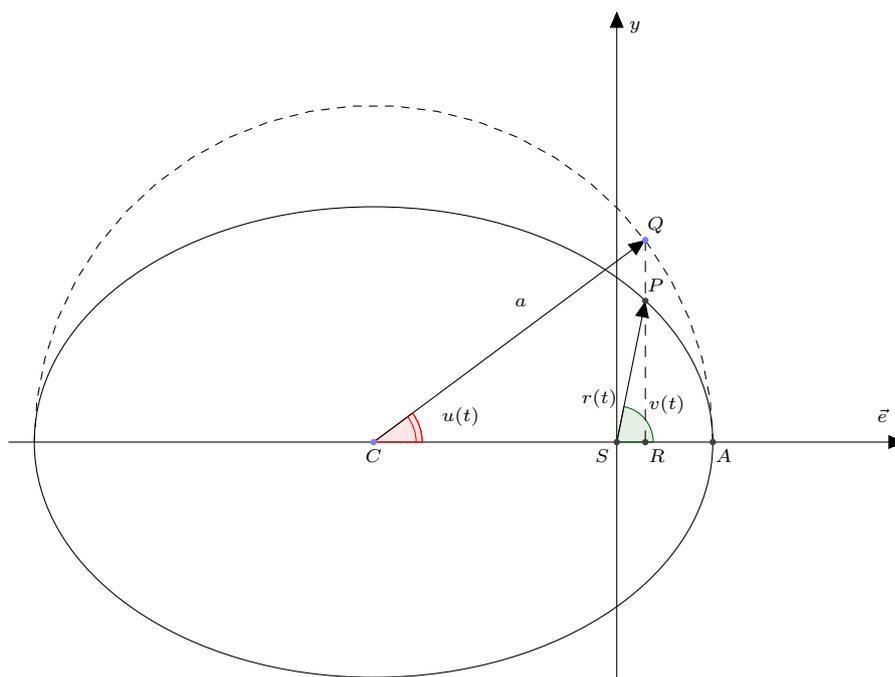


Figura 1.11: Costruzione dell'anomalia eccentrica.

1.4.1 L'equazione di Keplero

Cominciamo con una definizione.

DEFINIZIONE 1.28 - Sia t_P l'istante di tempo di passaggio per il pericentro, cioè tale che $v(t_P) = 0$. L'*anomalia media* è data dalla seguente espressione:

$$\ell(t) := n(t - t_P).$$

Se esistesse una relazione tra l'anomalia vera e l'anomalia media, il problema di trovare la legge oraria sarebbe risolto, in quanto disponiamo della (1.4). Purtroppo una tale relazione non esiste, dunque dobbiamo fare in altro modo.

DEFINIZIONE 1.29 - Sia P un punto dell'orbita ellittica, di centro C , eccentricità e e semiasse maggiore a . È univocamente determinato un punto Q sulla circonferenza di centro C e di diametro $2a$, tale che il segmento \overline{PQ} sia ortogonale al vettore di Lenz. L'angolo tra il vettore di Lenz e il vettore che unisce il centro a Q viene chiamato *anomalia eccentrica* e si indica con $u(t)$ (figura 1.11).

OSSERVAZIONE 1.30 - Sia P di ordinata y_P un punto dell'ellisse e Q di ordinata y_Q il corrispondente punto sulla circonferenza. Si vede che vale

$$y_P = y_Q \sqrt{1 - e^2}.$$

Semplici calcoli trigonometrici portano alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} r \cos v = a \cos u - f = a \cos u - ae \\ r \sin v = a \sin u \sqrt{1 - e^2}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Ricaviamo l'equazione dell'orbita in funzione dell'anomalia eccentrica: dalla (1.4), moltiplicando per il denominatore,

$$\begin{aligned} r + er \cos v &= a(1 - e^2) \\ r + e(a \cos u - ae) &= a - ae^2 \\ r + ea \cos u &= a, \end{aligned}$$

per cui otteniamo

$$r(t) = a(1 - e \cos u(t)). \quad (1.12)$$

Combinando quest'ultima con le (1.11), otteniamo

$$\begin{cases} \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \\ \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Mostriamo adesso che sussiste una relazione che lega l'anomalia eccentrica al tempo, così, grazie alla (1.12), otteniamo la legge oraria.

PROPOSIZIONE 1.31 (Formula di Keplero) - *Tra l'anomalia media e l'anomalia eccentrica sussiste la seguente relazione: per ogni t ,*

$$\ell(t) = u(t) - e \sin u(t). \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Osserviamo che vale la seguente uguaglianza (cfr. figura 1.11):

$$\frac{\text{area del settore } ASP}{\text{area dell'ellisse}} = \frac{t - t_P}{P}.$$

Il secondo membro è uguale a $\ell(t)/2\pi$; vediamo che l'area del settore ASP può essere scomposta come somma dell'area del triangolo PRS e dell'insieme RPA . La prima si vede facilmente essere uguale a (si ricordino le (1.13))

$$\text{area } PRS = \frac{1}{2} r^2 \sin v \cos v = \frac{1}{2} (a \cos u - ae)(a \sin u \sqrt{1 - e^2});$$

la seconda, invece, grazie all'osservazione (1.30), è uguale a (area di RQA) $\sqrt{1 - e^2}$ e l'area di RQA si può vedere come

$$\text{area del settore circolare } ACQ - \text{area del triangolo } RCQ.$$

Un semplice conto mostra che questa differenza è pari a

$$\frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 \sin u \cos u.$$

Infine, osserviamo che l'area dell'ellisse è $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$. Mettendo insieme i pezzi, otteniamo

$$-\frac{1}{2}a^2 e \sin u \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{2}a^2 \sqrt{1 - e^2} u = \frac{1}{2}a^2 \sqrt{1 - e^2} \ell.$$

Semplificando, otteniamo la tesi. \square

OSSERVAZIONE 1.32 - Abbiamo risolto il problema di trovare la legge oraria del moto: supponendo di conoscere il tempo di passaggio per il pericentro t_P , possiamo calcolare n con le condizioni iniziali e quindi ℓ . Grazie all'equazione di Keplero, infine, ci si ricava l'anomalia eccentrica u e si sfrutta la (1.12) per ottenere la legge oraria.

Risolvere l'equazione di Keplero: metodo di Newton

Non è possibile ricavare l'anomalia eccentrica u in funzione dell'anomalia media ℓ in via analitica: bisogna ricorrere ad un metodo numerico. Utilizzeremo il metodo di Newton, a convergenza quadratica.

Metodo di Newton Sia $f: [x_a, x_b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con derivata prima di segno costante in $[x_a, x_b]$. Per risolvere l'equazione $f(x) = 0$ si può approssimare la soluzione con la successione generata dalla seguente iterazione:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$$

In questo caso, il metodo converge per ogni $x_0 \in (x_a, x_b)$ con ordine di convergenza quadratico.

Nel nostro caso, noi vogliamo risolvere l'equazione $g(u) = 0$, dove

$$g(u) := u - e \sin u - \ell.$$

Pertanto, la successione generata dal metodo di Newton è

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - e \sin u_n - \ell}{1 - e \cos u_n}.$$

1.4.2 Calcolo dell'istante di passaggio dal pericentro

L'ultimo passo che ci separa dallo scrivere un algoritmo che calcoli la legge oraria del moto dei due corpi è il calcolo di t_P , il tempo di passaggio dal pericentro. Vediamo come fare.

Innanzitutto, uguagliamo la definizione di anomalia media e l'equazione di Keplero; in questo modo otteniamo la seguente relazione, valida per ogni t :

$$n(t - t_P) = u(t) - e \sin u(t).$$

Valutandola in $t = 0$, abbiamo:

$$t_P = \frac{e \sin u(0) - u(0)}{n}. \quad (1.15)$$

Si tratta, quindi, di calcolare $u(0)$ e il suo seno. Facciamo un piccolo resoconto dei dati in nostro possesso.

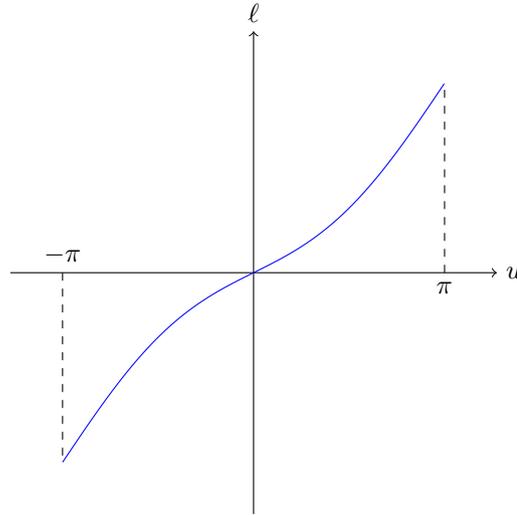


Figura 1.12: Grafico della funzione $f(u) := u - \sin u$.

Condizioni iniziali $m_1, m_2, \vec{\rho}_1(0), \vec{\rho}_2(0), \dot{\vec{\rho}}_1(0), \dot{\vec{\rho}}_2(0)$;

Integrali primi Elenchiamo gli integrali primi che possiamo calcolare a partire dalle condizioni iniziali e le quantità notevoli dell'orbita che ricaviamo da essi:

Energia $E = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0) - \frac{GM_{\text{tot}}}{r(0)} = \frac{GM_{\text{tot}}}{2a}$ \rightarrow calcolo il semiasse maggiore a e, dalla terza legge di Keplero, la velocità angolare media n .

Momento angolare $\vec{j} = \vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0)$.

Vettore di Lenz $\vec{e} = \frac{1}{GM_{\text{tot}}} \dot{\vec{r}}(0) \times \vec{j} - \frac{\vec{r}(0)}{r(0)}$ \rightarrow calcolo l'eccentricità e .

Una volta che conosciamo tutte queste quantità, possiamo, usando l'equazione dell'orbita, calcolare $\cos u(0)$:

$$r(0) = a(1 - e \cos u(0)) \implies \cos u(0) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r(0)}{a} \right).$$

È chiaro che, se conosciamo $\sin u(0)$, abbiamo univocamente individuato $u(0)$; derivando l'equazione dell'orbita, si ottiene

$$\dot{r}(t) = ae\dot{u}(t) \sin u(t),$$

da cui

$$\sin u(0) = \frac{\dot{r}(0)}{ae\dot{u}(0)}.$$

Resta da calcolare $\dot{u}(0)$.

LEMMA 1.33 - Tra modulo del raggio vettore e derivata prima dell'anomalia eccentrica vale la relazione

$$\dot{u}(t) = n \frac{a}{r(t)}. \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Uguagliamo le due espressioni per l'equazione dell'orbita:

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = a(1 - e \cos u).$$

Deriviamo entrambi i membri:

$$0 = -e\dot{v} \sin v(1 - e \cos u) + e\dot{u}(1 + e \cos v) \sin u.$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{v} \cdot \frac{\sin v}{\sin u} \cdot \frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos v} = \frac{j}{r^2} \cdot \frac{\sin v}{\sin u} \cdot \frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos v} \\ &= \frac{j}{r} \cdot \frac{1}{a(1 - e \cos u)} \cdot \frac{\sin v}{\sin u} \cdot \frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos v} = \frac{j}{r} \cdot \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin u}{r \sin u} \cdot \frac{1}{1 + e \cos v} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{j}{r} \cdot \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{r} \cdot \frac{r}{a(1 - e^2)} = \frac{j}{ar\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sqrt{GM_{\text{tot}}a(1 - e^2)}}{ar\sqrt{1 - e^2}} \\ &= \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{a}} \cdot \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{GM_{\text{tot}}}{a^3}} \cdot \frac{a}{r} \\ &= n \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

□

Possiamo finalmente dire di aver risolto il problema di trovare la legge oraria del moto dei due corpi.

1.5 L'orbita nello spazio

Grazie al fatto che l'orbita è piana, finora abbiamo lavorato con vettori due-dimensionali, scritti in coordinate scelte ad hoc del piano dell'orbita.

In questa sezione ci poniamo il problema di collocare l'orbita del problema dei due corpi ridotto nello spazio \mathbb{R}^3 in cui l'abbiamo formulato: vogliamo, cioè, individuare il piano in cui è contenuta e la posizione del corpo ad ogni istante rispetto al sistema inerziale di partenza Σ .

1.5.1 Elementi kepleriani

Supponiamo di avere un corpo di massa M_{tot} fissa nell'origine degli assi. Abbiamo bisogno di sei quantità per individuare il moto in \mathbb{R}^3 .

- DEFINIZIONE 1.34** -
1. Chiameremo *linea dei nodi* la retta d'intersezione tra il piano dell'orbita e il piano xy e *longitudine del nodo ascendente* l'angolo Ω che tale retta forma con l'asse delle x positive.
 2. Chiameremo *nodo ascendente* il punto d'intersezione \mathfrak{N} tra l'orbita e la linea dei nodi in cui il corpo, nel suo moto, passa dalle z negative alle z positive. L'altro punto di intersezione verrà chiamato *nodo discendente* ed indicato con \mathfrak{D} .
 3. Indicheremo con i l'angolo tra l'asse z e il vettore momento angolare \vec{j} .

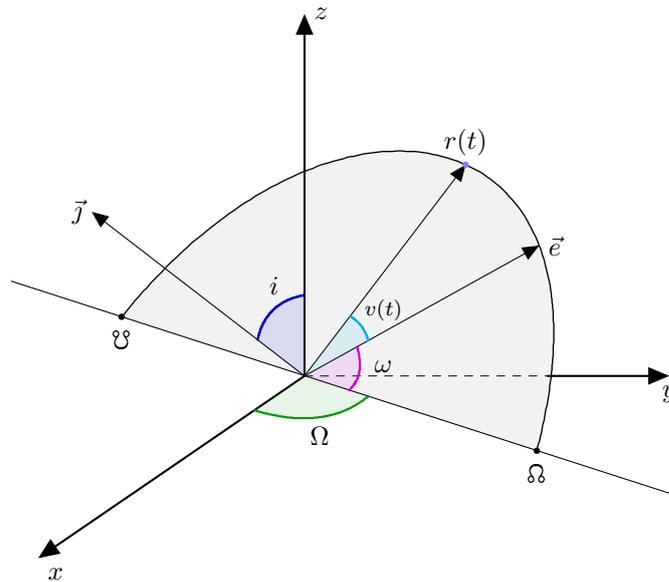


Figura 1.13: Gli elementi kepleriani Ω, i, ω , il nodo ascendente Ω e il nodo discendente \mathcal{U} .

4. Chiameremo *argomento* l'angolo ω tra la linea dei nodi e la direzione del vettore di Lenz \vec{e} .
5. Gli scalari $\Omega, i, \omega, a, e, \ell$ vengono detti *elementi kepleriani* e descrivono completamente l'orbita del problema dei due corpi (figura 1.13).

OSSERVAZIONE 1.35 - Si osservi che tutti gli elementi kepleriani, tranne ℓ , non dipendono dal tempo. Infatti, ℓ è l'unico che dà informazioni sul moto effettivo del corpo sull'orbita. In realtà, quando si considerano sistemi più complessi come il Sistema Solare, la presenza degli altri pianeti influisce sul moto della coppia Sole-pianeta, rendendo variabili anche gli altri cinque elementi kepleriani. Questa “variabilità” è percepibile solo per lunghi tempi, però.

1.5.2 Ritorno al sistema inerziale di partenza

Siamo pronti a ricavare le coordinate del vettore di posizione relativa $\vec{r}(t)$ nel sistema inerziale originario Σ . Infatti, le operazioni che abbiamo visto nella sezione 1.4 restituiscono $\vec{r}(t)$ scritto nelle coordinate del versore di Lenz \hat{e} , del suo ortogonale \hat{e}_\perp e del versore momento angolare \hat{j} : dobbiamo operare, dunque, un cambio di coordinate.

L'idea è quella di usare le coordinate kepleriane ω, Ω, i : con delle opportune rotazioni, portiamo il sistema $(\hat{e}, \hat{e}_\perp, \hat{j})$ a coincidere innanzitutto col riferimento inerziale del centro di massa. Le rotazioni giuste sono le seguenti:

1. si ruota il piano dell'orbita di un angolo $-\omega$ attorno a \hat{j} ;
2. si ruota tale piano di un angolo $-i$ attorno a $\hat{\Omega}$ (il versore della linea dei nodi);
3. si ruota il piano di un angolo $-\Omega$ attorno a \hat{e}_z .

Ad ognuna delle precedenti associamo, nell'ordine, una delle seguenti tre matrici:

$$\mathcal{R}_1 := \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}, \mathcal{R}_3 := \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ognuna delle matrici precedenti contiene le coordinate del riferimento di partenza rispetto al riferimento ottenuto con la corrispondente rotazione. Ad esempio, \mathcal{R}_1 contiene le coordinate dei vettori $\hat{e}, \hat{e}_\perp, \hat{j}$ rispetto al sistema di riferimento ottenuto ruotando quest'ultimo di $-\omega$ attorno a \hat{j} . Concludiamo che la matrice $\mathcal{R} := \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1$ fornisce le coordinate di $\hat{e}, \hat{e}_\perp, \hat{j}$ rispetto al sistema inerziale del centro di massa. Grazie alle (1.7) è possibile ricavarsi le orbite dei singoli corpi.

L'ultimo passo è tornare al sistema inerziale Σ di partenza: basta traslare i vettori posizione di \vec{R}_{CM} . In formule:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R}_{\text{CM}} - \frac{m_2}{M_{\text{tot}}} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_{\text{CM}} + \frac{m_1}{M_{\text{tot}}} \vec{r}. \end{cases}$$

1.6 Algoritmo per il problema dei due corpi

Ricordiamo la formulazione del problema dei due corpi: siano dati due corpi puntiformi di masse m_1, m_2 soggetti esclusivamente all'interazione gravitazionale. Vogliamo scrivere e risolvere le equazioni del moto. Sono dati i vettori posizione iniziale in \mathbb{R}^3 dei due corpi $\vec{\rho}_1(0), \vec{\rho}_2(0)$ e le velocità iniziali $\dot{\vec{\rho}}_1(0), \dot{\vec{\rho}}_2(0)$. Nella sezione 1.2.3 abbiamo visto come ridurci al problema ad un corpo in cui la massa totale $M := m_1 + m_2$ è concentrata nell'origine ed è fissa, mentre intorno vi orbita un corpo puntiforme di massa \mathcal{M} ; quindi ne abbiamo determinato l'orbita.

Vogliamo scrivere un algoritmo che, presi in input la posizione e la velocità all'istante iniziale, il prodotto della massa totale M per la costante di gravitazione universale G , restituisca posizione e velocità al tempo t_1 . Nella prima sezione vedremo qual è la logica dell'algoritmo, mentre nella seconda riportiamo il codice sorgente.

1.6.1 Schema dell'algoritmo

Come visto in precedenza, l'orbita del problema dei due corpi è completamente determinata una volta noti gli elementi kepleriani. Il punto fondamentale sarà passare dalle coordinate cartesiane dei vettori di posizione e velocità relativa $\vec{r}(0)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$ alle coordinate kepleriane $a, e, i, \Omega, \omega, \ell(0)$. Grazie a queste, saremo in grado di calcolare l'anomalia eccentrica all'istante di tempo t_1 , che ci darà la posizione del corpo sull'orbita a quell'istante; si tratterà, poi, di ritornare alle coordinate cartesiane.

Per quanto riguarda il primo problema, scriveremo una routine che chiameremo `carkep`, che ci permetterà di passare dalle coordinate cartesiane a quelle kepleriane. Per passare dalle coordinate kepleriane alle cartesiane, invece, scriveremo una routine di nome `kepcar`.

La subroutine `carkep`

Portiamo di seguito le operazioni da fare per passare da coordinate cartesiane a coordinate kepleriane. Tutte le formule che utilizziamo sono state dimostrate nelle sezioni precedenti.

1. Calcolo il momento angolare $\vec{j} = \vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0)$;

- controllo che $j \neq 0$, altrimenti non c'è orbitazione;
- calcolo $\cos i = j_z/j$ e da questo ricavo i (poiché $i \in (0, \pi)$, il suo coseno lo determina univocamente).

2. Calcolo il vettore di Lenz

$$\vec{e} = \frac{1}{GM} \dot{\vec{r}}(0) \times \vec{j} - \frac{\vec{r}(0)}{r(0)}$$

e ne ricavo l'eccentricità e e il versore \hat{e} .

3. Calcolo il versore dato dalla linea dei nodi

$$\hat{\Omega} = \frac{\hat{e}_z \times \vec{j}}{|\hat{e}_z \times \vec{j}|}$$

Con la funzione di Fortran `atan2`, che prende come argomento le coordinate Ω_y, Ω_x , ottengo Ω .

4. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \hat{e} \cdot \hat{\Omega} \\ \sin \omega &= |\hat{\Omega} \times \hat{e}| \\ \omega &= \text{atan2}(\sin \omega, \cos \omega). \end{aligned}$$

5. Calcolo

$$E = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0) - \frac{GM}{r(0)} = -\frac{GM}{2a},$$

da cui $a = -2GM/E$.

6. Calcolo $n = \sqrt{GM/a^3}$ (dalla terza legge di Keplero).

7. Calcolo $u(0)$:

- calcoliamo il coseno $\cos u(0) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r(0)}{a}\right)$;
- calcoliamo il seno

$$\sin u(0) = \frac{\dot{r}(0)}{ae\dot{u}(0)} = \frac{r(0)\dot{r}(0)}{a^2en} = \frac{\vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0)}{a^2en}$$

e utilizziamo `atan2`.

8. Calcoliamo $\ell(0) = u(0) - e \sin u(0)$.

9. Calcoliamo $t_P = -\ell(0)/n$.

Calcolo dell'anomalia eccentrica: ecca

A questo punto, abbiamo tutti i dati per determinare il moto del corpo sull'orbita; lo faremo scrivendo una subroutine di nome **ecca**. Supponiamo di voler calcolare $u(t_1)$: innanzitutto, calcoliamo $\ell(t_1) = n(t_1 - t_P)$ e lo riduciamo modulo 2π ; per calcolare $u(t_1)$ implementeremo il metodo di Newton⁶ applicato all'equazione di Keplero

$$\ell(t) = u(t) - e \sin u(t).$$

In qualche passo il valore di $u(t_1)$ è ottenuto. Grazie a tale numero, possiamo calcolare $\vec{r}(t_1)$ grazie alla (1.12), nelle coordinate del piano dell'orbita $(\hat{e}, \hat{e}_\perp, \hat{j})$.

La subroutine kepcar

Siamo in possesso delle coordinate kepleriane del punto all'istante t_1 . Come ultimo passo, dobbiamo scrivere tali coordinate nel sistema di riferimento cartesiano. L'idea è quella descritta nella sezione 1.5.2: ruoteremo il sistema di riferimento $(\hat{e}, \hat{e}_\perp, \hat{j})$ fino a farlo coincidere con il sistema inerziale di partenza, lasciando fisso il vettore \vec{r} : in questo modo otterremo la matrice che fornisce le coordinate di \vec{r} nel vecchio sistema di riferimento. Questa operazione sarà assegnata ad una subroutine che chiameremo **kepcar**.

1.6.2 L'algoritmo

Di seguito riportiamo il codice sorgente del programma descritto in precedenza.

```

1  program kepleq
2      implicit double precision (a-h,o-z)
3  C Main per il calcolo delle effemeridi dei pianeti nella approssimazione
4  C del problema dei due corpi mediante soluzione della equazione
5  C di Keplero. Si parte da coordinate cartesiane relative (problema ridotto).
6      dimension r(3),rp(3),ek(7)
7      write(*,*)'t0?'
8      read(*,*)t0
9      eps=1.d-15
10     gm=1.d0
11     write(*,*)'vettore posizione relativa a t0?'
12     read(*,*)r
13     write(*,*)'vettore velocita relativa a t0?'
14     read(*,*)rp
15 C Chiamo la routine che fornisce il vettore degli elementi kepleriani
16 C ek=n,e,i,argomento del pericentro,longitudine del nodo ascendente,
17 C anomalia media; semiasse maggiore). Notare che ek e' lungo 7 perche'
18 C all'ultimo posto ho aggiunto il semiasse maggiore. Notare che
19 C l'anomalia media e' quella del tempo t0 -am0-.
20     call carkep(r,rp,gm,eps,ek,en)
21     open(2,file='uscita.kep', status='new')
22     write(2,202)t0,r,rp,ek,en
23 C ek(6) e' l'anomalia media al tempo t0
24     202 format('t0=',d23.16/'r(t0)=' ,3d23.16/'rp(t0)=' ,3d23.16/
25     *'ek(n,e,i,omp,omg,l,a)=' ,/3d23.16/3d20.12/d23.16/'en=' ,d23.16)
26     am0=ek(6)

```

⁶Vedi paragrafo 1.4.1

```

27 C Mi chiede il tempo successivo t1
28   do i=1,10
29     write(*,*)'t1?'
30     read(*,*)t1
31 C Calcolo l'anomalia media al tempo t1
32   deltat=t1-t0
33   ek(6)=am0+ek(1)*deltat
34 C Chiamo la routine che fornisce posizione e velocita' relative r,rp a t1
35 C e anche l'energia (per unita' di massa ridotta) a t1 per controllare
36 C che si mantenga costante
37   call kepcar(ek,gm,eps,r,rp,en)
38   write(2,302)t1,r,rp,en
39 C Notare che en e' stata ricalcolata al tempo t1
40   302 format('t1,r,rp,en',/d23.16/3d20.12/3d20.12/d24.16)
41   1 continue
42   end
43 C*****
44 C*****
45   subroutine carkep(r,rp,gm,eps,ek,en)
46   implicit double precision (a-h,o-z)
47 C Date le coordinate cartesiane relative r,rp della massa ridotta e il
48 C prodotto gm calcola il vettore ek degli elementi kepleriani e
49 C l'energia en (per unita' della massa ridotta). Si noti che ek e' lungo
50 C 7 e non 6: moto medio, eccentricita', inclinazione, argomento del
51 C pericentro, longitudine del nodo ascendente, anomalia media e semiasse
52 C maggiore. eps dipende dalla macchina, che non sa distinguere due
53 C numeri che differiscono di <= di eps.
54   dimension r(3),rp(3),ek(7),gei(3),e(3),vz(3),g(3),ev(3),an(3),
55   *anv(3)
56   data pig,vz/3.1415926535897932d0,0.d0,0.d0,1.d0/
57 C Calcolo il momento angolare per unita' di massa gei
58   call prvec(r,rp,gei)
59   geis=size(gei)
60 C Se geis e' zero non ho moto orbitale
61   if(geis.lt.eps)goto 101
62   cosi=gei(3)/geis
63 C Calcolo l'inclinazione ek(3)
64   ek(3)=dacos(cosi)
65 C Se i e' 0 o pig il nodo non e' definito
66   if(ek(3).lt.eps)goto 102
67   if(ek(3).gt.pig-eps)goto 103
68 C Calcolo il vettore di Lenz e
69   call prvec(rp,gei,e)
70   rs=size(r)
71   call vlinc(1.d0/gm,e,-1.d0/rs,r,e)
72 C Calcolo l'eccentricita' ek(2)
73   ek(2)=size(e)
74 C Se l'eccentricita' e' 0 il pericentro non e' definito
75   if(ek(2).lt.eps)goto 104
76 C ev=versore dall'origine al pericentro
77   call scmu(1.d0/ek(2),e,ev)
78 C Calcolo il vettore del nodo ascendente con versore anv
79   call prvec(vz,gei,an)
80 C ek(5)=longitudine del nodo ascendente
81   ek(5)=datan2(an(2),an(1))
82   ans=size(an)

```

```

83 C ek(4)=omega piccolo=argomento del pericentro
84   call scmu(1.d0/ans,an,anv)
85   cosop=prscal(anv,ev)
86   call prvec(anv,ev,g)
87   sinop=size(g)
88   ek(4)=datan2(sinop,cosop)
89 C duen=doppio dell'energia orbitale (per unita' di massa ridotta)
90   duen=prscal(rp,rp)-2.d0*gm/rs
91   en=duen/2.d0
92 C Deve essere negativa perche' studio le orbite ellittiche
93   if(en.gt.-eps)goto 105
94 C ek(7)=semiasse maggiore
95   ek(7)=-gm/duen
96 C ek(1)=moto medio
97   ek(1)=(-duen)**1.5d0/gm
98 C Calcolo l'anomalia eccentrica u
99   sinu=prscal(r,rp)/(ek(1)*ek(2)*ek(7)*ek(7))
100  cosu=(1.d0-rs/ek(7))/ek(2)
101  u=datan2(sinu,cosu)
102 C Calcolo l'anomalia media ek(6) dall'equazione di Keplero
103  ek(6)=u-ek(2)*sinu
104  return
105  101 write(*,*)'mom ang zero'
106      stop
107  102 write(*,*)'inclinaz zero'
108      stop
109  103 write(*,*)'inclinaz pig'
110      stop
111  104 write(*,*)'eccentricita zero'
112      stop
113  105 write(*,*)'orbita aperta'
114      stop
115  end
116 C*****
117  subroutine kepcar(ek,gm,eps,r,rp,en)
118  implicit double precision (a-h,o-z)
119 C Dato il vettore degli elementi kepleriani (lungo 7) (n,e,i, ompic, omg
120 C l,a) calcola posizione e velocita' relativa x e v nel piano
121 C dell'orbita e li ruota fino ad ottenere posizione e velocita' nel
122 C riferimento inerziale di partenza r,rp. Ricalcola anche l'energia en
123 C per controllo. eps come al solito.
124   dimension ek(7),x(3),v(3),r(3),rp(3)
125   u=ecca(ek(2),ek(6),eps)
126   cosu=dcos(u)
127   sinu=dsin(u)
128   beta=dsqrt(1.d0-ek(2)*ek(2))
129   x(1)=ek(7)*(cosu-ek(2))
130   x(2)=ek(7)*beta*sinu
131   x(3)=0.d0
132   call rota(x,ek(4),x)
133   call rota(x(2),ek(3),x(2))
134   r(3)=x(3)
135   call rota(x,ek(5),r)
136   rs=size(r)
137 C Calcolo la velocita'
138   rsua=1.d0-ek(2)*cosu

```

```

139     up=ek(1)/rsua
140     v(1)=-ek(7)*up*sinu
141     v(2)=ek(7)*beta*up*cosu
142     v(3)=0.d0
143     call rota(v,ek(4),v)
144     call rota(v(2),ek(3),v(2))
145     rp(3)=v(3)
146     call rota(v,ek(5),rp)
147     v2=prscal(rp,rp)
148     en=v2/2.d0-gm/rs
149     return
150     end
151 c*****
152 c*****
153     subroutine prvec (a,b,c)
154 c Calcola il prodotto vettore di due vettori di R3. axb=c
155     implicit double precision (a-h,o-z)
156     dimension a(3), b(3), c(3)
157     c(1) = a(2)*b(3)-a(3)*b(2)
158     c(2) = a(3)*b(1)-a(1)*b(3)
159     c(3) = a(1)*b(2)-a(2)*b(1)
160     return
161     end
162 c*****
163     double precision function prscal(a,b)
164 c Calcola il prodotto scalare di due vettori di R3. prscal=a.b
165     implicit double precision (a-h,o-z)
166     dimension a(3),b(3)
167     prscal=0.d0
168     do 1 i=1,3
169         prscal=prscal+a(i)*b(i)
170     1   continue
171     return
172     end
173 c*****
174     subroutine sum(a,b,c)
175 c Calcola la somma di due vettori di R3. a+b=c
176     implicit double precision (a-h,o-z)
177     dimension a(3),b(3),c(3)
178     do 1 i=1,3
179     1   c(i)=a(i)+b(i)
180     return
181     end
182 c*****
183     subroutine scmu(alfa,a,b)
184 c Calcola il prodotto di uno scalare per un vettore di R3. alfaa=b
185     implicit double precision (a-h,o-z)
186     dimension a(3),b(3)
187     do 1 i=1,3
188     1   b(i)=alfa*a(i)
189     return
190     end
191 c*****
192     subroutine vlinc(alfa,a,beta,b,c)
193 c Calcola la combinazione lineare di due vettori di R3
194 c alfaa+betaxb=c

```

```

195     implicit double precision (a-h,o-z)
196     dimension a(3),b(3),c(3),w1(3),w2(3)
197     call scmu(alfa,a,w1)
198     call scmu(beta,b,w2)
199     call sum(w1,w2,c)
200     return
201     end
202 c*****
203     double precision function size(a)
204 c Calcola la lunghezza di un vettore di R3. size=modulo di a
205     implicit double precision (a-h,o-z)
206     dimension a(3)
207     size=dsqrt(prscal(a,a))
208     return
209     end
210 c*****
211     double precision function protri(a,b,c)
212 c Calcola il prodotto triplo di 3 vettori di R3
213 c protri=a(bxc)
214     implicit double precision (a-h,o-z)
215     dimension a(3),b(3),c(3),w(3)
216     call prvec(b,c,w)
217     protri=prscal(a,w)
218     return
219     end
220 c*****
221     subroutine rota(a,teta,b)
222 c matrice che ruota il vettore a (di un agolo teta, positivo in verso
223 c antiorario) nel vettore b lasciando invariati gli assi coordinati;
224 c analogamente, la matrice fornisce le coordinate dello stesso vettore
225 c tenuto fisso nel nuovo sistema di assi ottenuto ruotato di (-teta)
226 c rispetto a quello di partenza
227     implicit double precision (a-h,o-z)
228     dimension a(2),b(2),w(2)
229     cost=dcos(teta)
230     sint=dsin(teta)
231     w(1)=a(1)*cost-a(2)*sint
232     w(2)=a(1)*sint+a(2)*cost
233     b(1)=w(1)
234     b(2)=w(2)
235     return
236     end
237 c*****
238     double precision function ecca(e,am,eps)
239     implicit double precision (a-h,o-z)
240 c     data pig/3.1415926535897932d0/
241     pig=4.d0*datan(1.d0)
242     am=princ(am)
243     u=pig*segno(am)
244     do 1 i=1,20
245         d=(u-e*dsin(u)-am)/(1.d0-e*dcos(u))
246         u=u-d
247         if(dabs(d).lt.eps)then
248             ecca=u
249             return
250         endif

```

```
251 1 continue
252 write(*,106)d,am,u,e
253 106 format('non convergenza eq kepler',/'d= 'd23.16/'am= 'd23.16/
254 *'ecca= 'd23.16/'e= 'd23.16)
255 return
256 end
257 c*****
258 double precision function princ(teta)
259 c Fornisce il valore di un angolo in radianti tra -pig e +pig
260 implicit double precision (a-h,o-z)
261 c data pig/3.1415926535897932d0/
262 pig=4.d0*datan(1.d0)
263 dpig=2.d0*pig
264 ngiri=dabs(teta)/dpig
265 c fornisce teta tra 0 e dpig oppure 0 e -dpig. Ridurre tra -pig e pig
266 teta=teta-(ngiri*dpig*segno(teta))
267 if(teta.lt.-pig)teta=teta+dpig
268 if(teta.gt.pig)teta=teta-dpig
269 princ=teta
270 return
271 end
272 c*****
273 double precision function segno(x)
274 c Fornisce il segno di una variabile x
275 implicit double precision (a-h,o-z)
276 if(x.eq.0.d0)segno=0.d0
277 if(x.gt.0.d0)segno=1.d0
278 if(x.lt.0.d0)segno=-1.d0
279 return
280 end
281 c*****
```

CAPITOLO 2

IL PROBLEMA DEI TRE CORPI RISTRETTO CIRCOLARE

Nel precedente capitolo abbiamo studiato nei dettagli il problema dei due corpi: abbiamo dimostrato che è integrabile e abbiamo visto come calcolarne la legge oraria per via analitica. Non appena si cerca di modificare il problema, magari aggiungendo un terzo corpo, perdiamo l'integrabilità: i gradi di libertà diventano nove, ma non abbiamo altrettanti integrali primi. Il problema è, dunque, ben più complicato.

In questo capitolo tratteremo il problema dei tre corpi in un caso semplificato: faremo due ipotesi che renderanno lo studio del problema più agevole, ma che ci permetteranno di dire ancora qualcosa di interessante. In particolare, troveremo un nuovo integrale primo e riusciremo a definire un criterio di stabilità.

2.1 Formulazione del problema

Il *problema dei tre corpi ristretto circolare* consiste nello studio del moto di tre corpi in \mathbb{R}^3 soggetti esclusivamente alla mutua attrazione gravitazionale, con le seguenti ipotesi aggiuntive.

Ristretto : uno dei tre corpi ha massa trascurabile rispetto a quelle degli altri due (che, a seconda delle loro masse, chiameremo *primario* e *secondario*) e quindi non influisce sulle loro orbite, che saranno quelle di un classico problema dei due corpi; diremo che il primario e il secondario formano una *binaria*¹.

Circolare : le orbite del primario e del secondario sono circolari.

Supporremo, inoltre, che l'asteroide si trovi nel piano delle orbite della binaria. Questa ipotesi, però, non è restrittiva: giungeremo agli stessi risultati anche nel caso più generale.

Vediamo il *setting* del problema. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale Oxy , che chiameremo *sidereo*, in cui l'origine è il centro di massa della binaria, l'asse x è dato dalla

¹Per avere un'idea, si può pensare al caso in cui la binaria è formata da Sole (il primario) e Giove (il secondario) e il terzo corpo è un asteroide - in virtù di questo esempio, spesso nel seguito chiameremo il terzo corpo "l'asteroide".

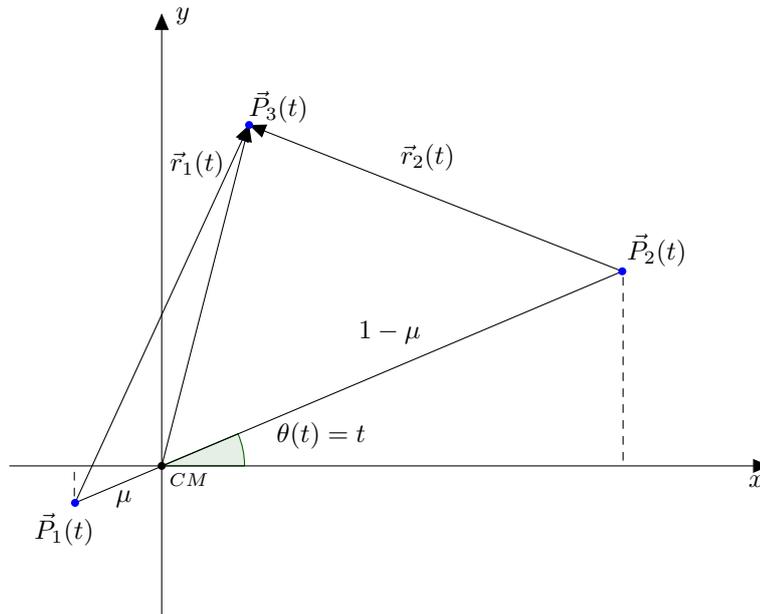


Figura 2.1: Schema del problema dei tre corpi ristretto circolare, riferimento sidereo.

direzione al tempo iniziale del vettore di posizione relativa dei corpi della binaria e l'asse y è ad esso perpendicolare. Supponiamo che il primario e il secondario abbiano rispettivamente masse m_1, m_2 e denotiamo con $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ rispettivamente le posizioni del primario, del secondario e del terzo corpo.

Per l'ipotesi di orbite circolari, la velocità angolare della binaria è costante ed è pari alla velocità angolare media n : l'angolo $\theta(t)$ (cfr. figura 2.1) assume quindi valore nt .

Facciamo, inoltre, le seguenti semplificazioni:

- $G := 1$;
- $m_1 + m_2 := 1$;
- $d := |\vec{P}_2 - \vec{P}_1| \equiv 1$.

Dalla terza legge di Keplero per la binaria, otteniamo:

$$n^2 d^3 = GM_{\text{tot}} = 1 \implies n = 1.$$

Quello che dobbiamo tenere ben presente è che, se non ci fosse il secondario, il terzo corpo si muoverebbe attorno al primario come abbiamo studiato nel capitolo 1. In un certo senso, l'aggiunta del secondo corpo corrisponde ad una *perturbazione* del problema dello studio del moto del sistema primario-terzo corpo. Con la prossima definizione vogliamo dare una misura di questa perturbazione.

DEFINIZIONE 2.1 - Il *parametro perturbativo* è la seguente quantità adimensionale:

$$\mu := \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

OSSERVAZIONI 2.2 - - Il parametro perturbativo è tanto più grande quanto più è massivo il secondo corpo.

- Nelle nostre convenzioni, $\mu = m_2$ e $m_1 = 1 - \mu$.

2.2 L'equazione del moto per il terzo corpo

Naturalmente, per le ipotesi che abbiamo fatto, il moto della binaria è perfettamente noto. Dobbiamo preoccuparci di studiare solo il moto del terzo corpo: cominciamo scrivendone l'equazione. Innanzitutto, poniamo

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &:= \vec{P}_3(t) - \vec{P}_1(t) \\ \vec{r}_2(t) &:= \vec{P}_3(t) - \vec{P}_2(t)\end{aligned}$$

e osserviamo che, per la relazione tra masse e raggi vettori (1.6), vale

$$\left| \vec{P}_2(t) \right| = 1 - \mu, \quad \left| \vec{P}_1(t) \right| = \mu.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\vec{P}_1(t) &= (-\mu \cos t, -\mu \sin t) \\ \vec{P}_2(t) &= ((1 - \mu) \cos t, (1 - \mu) \sin t),\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}r_1(t) &= \sqrt{(x + \mu \cos t)^2 + (y + \mu \sin t)^2} \\ r_2(t) &= \sqrt{(x - (1 - \mu) \cos t)^2 + (y - (1 - \mu) \sin t)^2}.\end{aligned}$$

Scriviamo il potenziale per unità di massa dell'asteroide, che indicheremo con V , nel punto in cui si trova il terzo corpo². Ne faremo il gradiente e otterremo la forza che agisce sull'asteroide. Abbiamo che

$$V(x, y, t) = -\frac{Gm_2}{\left| \vec{P}_3(t) - \vec{P}_2(t) \right|} - \frac{Gm_1}{\left| \vec{P}_3(t) - \vec{P}_1(t) \right|} = -\frac{\mu}{r_2(t)} - \frac{1 - \mu}{r_1(t)}.$$

La forza per unità di massa è $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, per cui l'equazione del moto (in componenti) è

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial y} \end{cases}$$

Usando il fatto che $\vec{\nabla}r = \vec{r}/r$, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\mu}{r_2^3}(x - (1 - \mu) \cos t) - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu \cos t) \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{r_2^3}(y - (1 - \mu) \sin t) - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(y + \mu \sin t). \end{cases} \quad (2.1)$$

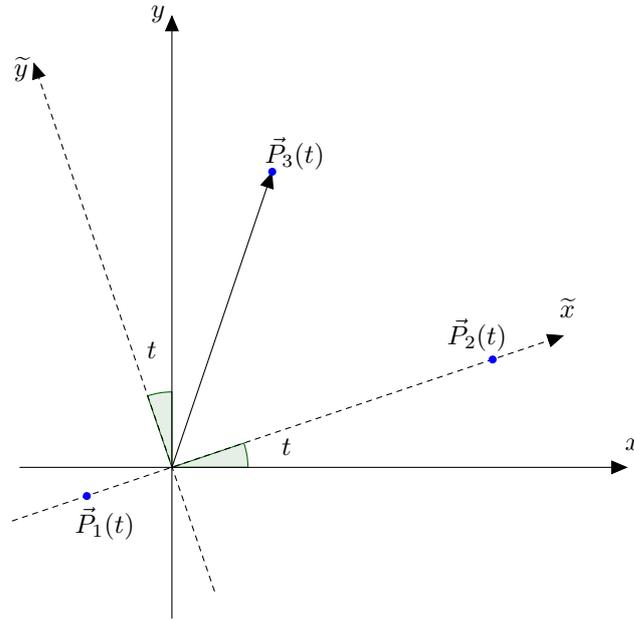


Figura 2.2: Schema del problema dei tre corpi ristretto circolare, riferimento sidereo e sinodico.

Vorremmo eliminare la dipendenza esplicita dal tempo; per far ciò, dobbiamo cambiare sistema di riferimento e scrivere le equazioni nel sistema di riferimento rotante $O\tilde{x}\tilde{y}$ della binaria, che chiameremo *riferimento sinodico* (figura 2.2). Osserviamo che tale sistema di riferimento ha velocità angolare \vec{n} di modulo 1 e diretta lungo la semiretta perpendicolare uscente dal piano del foglio. La trasformazione che esprime le coordinate del sistema di riferimento inerziale rispetto alle coordinate del sistema rotante è la seguente:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t \\ y = \tilde{x} \sin t + \tilde{y} \cos t. \end{cases} \quad (2.2)$$

Deriviamo le precedenti rispetto al tempo per ottenere espressioni di $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ in funzione di \tilde{x}, \tilde{y} e delle loro derivate; si ottengono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\tilde{x} \sin t + \dot{\tilde{x}} \cos t - \tilde{y} \cos t - \dot{\tilde{y}} \sin t \\ \dot{y} = \tilde{x} \cos t + \dot{\tilde{x}} \sin t - \tilde{y} \sin t + \dot{\tilde{y}} \cos t \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \ddot{x} = \tilde{x} \cos t - 2\dot{\tilde{x}} \sin t + \ddot{\tilde{x}} \cos t + \tilde{y} \sin t - 2\dot{\tilde{y}} \cos t - \ddot{\tilde{y}} \sin t \\ \ddot{y} = -\tilde{x} \sin t + 2\dot{\tilde{x}} \cos t + \ddot{\tilde{x}} \sin t - \tilde{y} \cos t - 2\dot{\tilde{y}} \sin t + \ddot{\tilde{y}} \cos t. \end{cases} \quad (2.3)$$

Omettiamo la riscrittura delle (2.1) nelle nuove coordinate, perché poco interessanti, e ci concentriamo su una loro manipolazione. Moltiplicando la prima equazione per $\cos t$ e la seconda

²Poiché la binaria si muove, ci aspettiamo che tale potenziale dipenda esplicitamente dal tempo.

per $\sin t$ e sommandole, si ottiene la seguente equazione:

$$\ddot{\tilde{x}} = 2\dot{\tilde{y}} + \dot{\tilde{x}} - \frac{\mu}{r_2^3}(\tilde{x} - 1 + \mu) - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(\tilde{x} + \mu). \quad (2.4)$$

OSSERVAZIONE 2.3 - Al secondo membro, individuiamo i seguenti contributi:

- il primo addendo è dovuto alla forza di Coriolis: ci dovrebbe essere un n a causa della derivazione, ma manca poiché l'abbiamo posto uguale a 1;
- il secondo addendo è dovuto alla forza centrifuga: stavolta dovrebbe esserci un n^2 , ma, come prima, manca perché vale 1;
- il terzo addendo è dovuto all'attrazione del primario;
- il quarto addendo è dovuto all'attrazione del secondario.

Analogamente, moltiplicando la prima equazione per $-\sin t$ e la seconda per $\cos t$ e sommandole, si ottiene l'equazione

$$\ddot{\tilde{y}} = -2\dot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{y}} - \frac{\mu}{r_2^3}\tilde{y} - \frac{1 - \mu}{r_1^3}\tilde{y}. \quad (2.5)$$

La (2.4) e la (2.5) danno le equazioni del moto dell'asteroide nel sistema di riferimento sinodico.

2.3 L'integrale di Jacobi

Ci apprestiamo ad individuare un nuovo integrale primo del moto, il quale ci darà informazioni sulle regioni dello spazio, a seconda delle condizioni iniziali, in cui il terzo corpo può orbitare.

2.3.1 Un nuovo integrale primo

Nel prossimo teorema vediamo come ottenere un nuovo integrale primo a partire dalle equazioni del moto.

TEOREMA 2.4 - *Nelle coordinate del sistema di riferimento sinodico, la funzione*

$$C(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) := \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1 - \mu}{r_1} \quad (2.6)$$

è un integrale primo del moto del terzo corpo.

Dimostrazione. Moltiplichiamo l'equazione (2.4) per $\dot{\tilde{x}}$ e la (2.5) per $\dot{\tilde{y}}$. Sommando le equazioni così ottenute e portando tutto a primo membro, si ottiene esattamente l'equazione

$$\dot{C} = 0.$$

□

DEFINIZIONE 2.5 - Chiameremo *integrale di Jacobi* la funzione $\mathcal{I} := -C$.

D'ora in poi porremo

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) := \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1},$$

così il nuovo integrale diventa

$$C = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

È abbastanza chiaro che C ha le dimensioni di un'energia per unità di massa, ma vogliamo capire meglio cosa rappresenta il contributo dato da Ω . Per far ciò, scriveremo C nelle coordinate del sistema di riferimento sidereo.

PROPOSIZIONE 2.6 - *Nel sistema di riferimento sidereo, l'integrale C assume l'espressione*

$$C_{sid} = E - \vec{j} \cdot \vec{n},$$

dove E è l'energia del terzo corpo per unità di massa, \vec{j} è il momento angolare per unità di massa del terzo corpo e \vec{n} è il vettore velocità angolare del riferimento sinodico rispetto al sidereo.

Dimostrazione. La trasformazione inversa della (2.2) è data dalle seguenti:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos t + y \sin t \\ \tilde{y} = -x \sin t + y \cos t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Derivandole, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dot{x} \cos t + \dot{y} \sin t - x \sin t + y \cos t \\ \dot{\tilde{y}} = -\dot{x} \sin t + \dot{y} \cos t - x \cos t - y \sin t. \end{cases} \quad (2.8)$$

Facendo i dovuti conti, si ottiene che

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + y^2 + 2\dot{x}y - 2x\dot{y} \\ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione di C_{sin} , si ottiene

$$C_{sid} = \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1-\mu}{r_1}}_{=E} + \dot{x}y - x\dot{y}.$$

Per concludere basta osservare che la quantità $x\dot{y} - y\dot{x}$ rappresenta la terza componente del vettore momento angolare per unità di massa del terzo corpo; essendo quest'ultimo parallelo a \vec{n} , allora è proprio $\vec{j} \cdot \vec{n}$. \square

OSSERVAZIONE 2.7 - La proposizione appena dimostrata vale, più in generale, se l'asteroide non si muovesse nello stesso piano del binario, ma fosse libero di muoversi in \mathbb{R}^3 . In questo caso, il momento angolare non è, in generale, parallelo al vettore momento angolare, per cui l'espressione che si ottiene è sempre

$$C_{sid} = E - \vec{j} \cdot \vec{n},$$

ma il numero $\vec{j} \cdot \vec{n}$ non è solo la terza componente di \vec{j} , come era in precedenza.

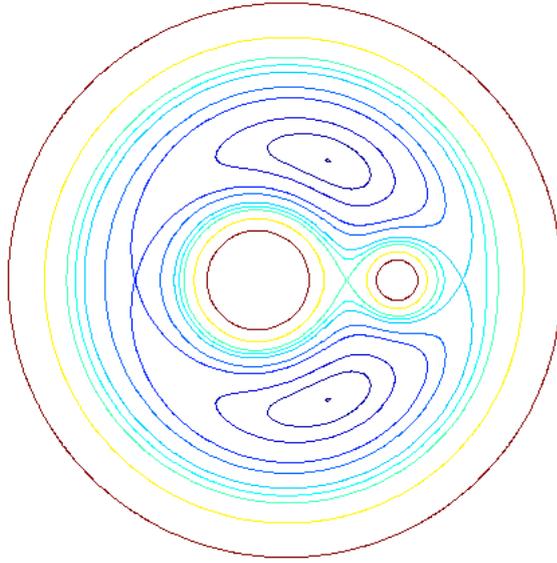


Figura 2.3: Curve di livello della funzione Ω , con $m_1/m_2 = 4$.

2.3.2 Regioni ammissibili di moto

In questa sezione vedremo come è possibile ricavare informazioni sul moto dell'asteroide a partire dal valore di C . Lavoreremo esclusivamente nel sistema di riferimento sinodico.

Una considerazione fondamentale è la seguente: dall'espressione di C_{sin} abbiamo che

$$C_{\text{sin}} + \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) \geq 0,$$

per cui, essendo C una costante del moto, abbiamo che deve essere soddisfatta per ogni tempo la seguente condizione:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \mathcal{I}. \quad (2.9)$$

OSSERVAZIONI 2.8 - - La precedente condizione (2.9) ci dà un criterio per stabilire quali sono, nel riferimento sinodico, le zone in cui il moto è ammissibile: a partire dalle condizioni iniziali ci si calcola il valore di \mathcal{I} e ci si disegna, nel piano \tilde{x}, \tilde{y} , la curva $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{I}\}$. Se, ad esempio, questa fosse una curva chiusa, dividerebbe il piano in due zone distinte: una in cui il valore di Ω è maggiore strettamente di \mathcal{I} e una in cui è minore strettamente di \mathcal{I} . Il moto sarebbe costretto ad avvenire nella prima delle due zone.

- È importante osservare che le curve di livello della funzione Ω *non sono orbite* dell'asteroide. In particolare, la curva $\{\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{I}\}$ rappresenta il luogo dei punti del riferimento sinodico

in cui l'asteroide ha velocità nulla *rispetto al riferimento rotante*³: è per questo che sono anche chiamate *curve a velocità zero*.

Cerchiamo adesso di capire come sono fatte tali curve per diversi valori di \mathcal{I} . Una prima osservazione che facciamo è che la funzione Ω assume valori arbitrariamente grandi in tre casi:

- se $r_1 \rightarrow 0$, cioè se l'asteroide si avvicina arbitrariamente al primario;
- se $r_2 \rightarrow 0$, cioè se l'asteroide si avvicina arbitrariamente al secondario;
- se $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow \infty$, cioè se l'asteroide si allontana arbitrariamente dalla binaria, tanto che essa può essere considerata, dovuta la distanza, un unico corpo.

Detto questo, distinguiamo tre casi (si osservi la figura 2.3 per maggior chiarezza):

1. Consideriamo il caso in cui $\mathcal{I} =: \mathcal{I}_I > 0$ è molto grande, prossimo all'infinito. La curva a velocità zero è $\Omega = \mathcal{I}_I$, per cui anche Ω sarà prossimo all'infinito. Ciò avviene in uno dei tre casi discussi precedentemente, cioè può essere che:

- $(1 - \mu)/r_1 \simeq \mathcal{I}_I$, che ci dà una circonferenza di centro il primario e raggio $(1 - \mu)/\mathcal{I}_I$;
- $\mu/r_2 \simeq \mathcal{I}_I$, che ci dà una circonferenza di centro il secondario e raggio μ/\mathcal{I}_I (si osservi che questo valore è più piccolo di $(1 - \mu)/\mathcal{I}_I$);
- $(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/2 \simeq \mathcal{I}_I$, che ci dà una circonferenza di centro l'origine e raggio $2\mathcal{I}_I$.

Queste curve dividono il piano in quattro componenti connesse: due sono i dischi delimitati dalle prime due circonferenze, una è l'aperto illimitato che ha per bordo la terza circonferenza, e la quarta è la restante. Poiché il valore di Ω si vede facilmente essere maggiore di \mathcal{I}_I nelle prime tre componenti connesse, allora il moto può avvenire solo in uno dei primi tre aperti.

ESEMPIO 2.9 - Supponiamo di avere un asteroide le cui condizioni iniziali (posizione e velocità) diano luogo ad un valore dell'integrale di Jacobi pari a \mathcal{I}_I . Supponiamo, inoltre, che la sua posizione iniziale sia all'interno della circonferenza attorno al secondario, sia, cioè, un *satellite* del secondario; grazie al discorso precedente, l'asteroide è vincolato a restare in quella regione di spazio e resterà un satellite del secondario per tutti i tempi.

2. Consideriamo il caso di $0 < \mathcal{I} =: \mathcal{I}_{II} < \mathcal{I}_I$, ma comunque grande. La situazione è topologicamente la stessa di prima: le curve a velocità zero sono ancora tre circonferenze, con la differenza che i raggi delle prime due sono più grandi dei raggi di quelle ottenute al livello \mathcal{I}_I ⁴, mentre il raggio della terza è più piccolo. Le conclusioni sul moto sono le stesse.
3. A mano a mano che diminuiamo il valore di \mathcal{I} , le circonferenze attorno al primario e al secondario si allargano. È ragionevole pensare che esista un certo valore di \mathcal{I} , diciamo $\overline{\mathcal{I}}$, che dia una situazione limite in cui queste circonferenze si toccano in un punto, dando origine ad una curva a forma di "8". Effettivamente tale punto esiste, ed è un punto a forza

³È come se fosse un bambino fermo su una giostra: per noi osservatori esterni, il bimbo possiede una velocità non nulla, ovviamente.

⁴Si osservi che, se $\mathcal{I} > \mathcal{I}_{II}$, allora $(1 - \mu)/\mathcal{I} < (1 - \mu)/\mathcal{I}_{II}$.

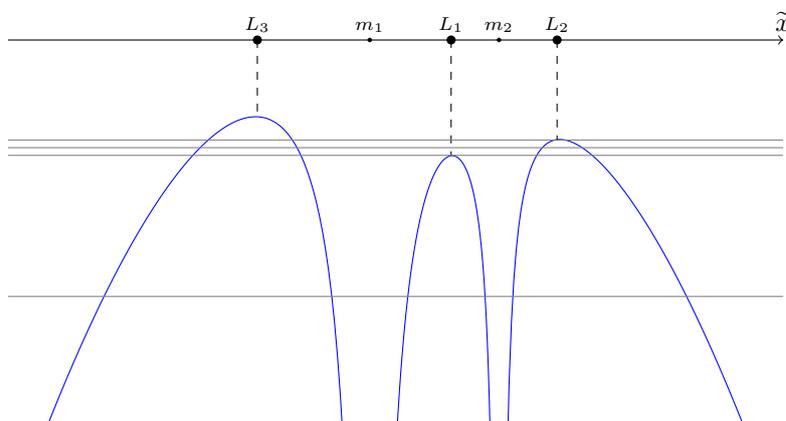


Figura 2.4: Grafico della funzione $-\Omega(\tilde{x}, 0)$ e livelli corrispondenti a curve topologicamente distinte.

zero, che chiameremo *primo punto di Lagrange* e che indicheremo con L_1 ⁵.

Per valori dell'integrale di Jacobi minori di $\overline{\mathcal{J}}$, la topologia delle curve di livello è molto varia; descriviamo alcuni di questi casi:

- incontriamo dapprima una curva semplice chiusa attorno alla binaria; in questo caso il terzo corpo può essere sia un satellite del primario, sia uno del secondario, sia entrambi e non possiamo stabilire a priori - senza metodi di integrazione numerica - quale sia la sua condizione;
- diminuendo il valore di \mathcal{J} , la curva appena descritta si aprirà in un punto L_2 che si trova oltre il secondario; in questo caso il moto è possibile sia attorno alla binaria che arbitrariamente lontano da essa;
- per valori ancora minori di \mathcal{J} , esiste un punto L_3 , oltre il primario, in cui la curva si spezza in due curve semplici chiuse attorno a due punti, L_4 e L_5 , tali che $m_1 m_2 L_4$ e $m_1 m_2 L_5$ siano triangoli equilateri: il moto si svolge all'interno di queste curve.

OSSERVAZIONE 2.10 - Vale la pena sottolineare che, sebbene abbiamo fatto un discorso puramente bidimensionale, in realtà il ragionamento è identico nel caso in cui il terzo corpo possa muoversi in \mathbb{R}^3 . In questo caso, le circonferenze attorno al primario e al secondario saranno sfere che delimitano le regioni ammissibili di moto per l'asteroide.

Per intuire quali sono le curve di livello della funzione Ω si può osservare la figura 2.4, che riporta il grafico nel piano $\tilde{x}\tilde{z}$ della funzione $-\Omega(\tilde{x}, 0)$. È evidente che i punti L_1, L_2, L_3 sono punti in cui il numero di curve di livello cambia: per valori molto piccoli di $-\mathcal{J}$ ci sono tre curve, a mano a mano che aumenta le curve passano a due (in corrispondenza di L_1), poi a una (in corrispondenza di L_2 e L_3).

⁵Ci occuperemo del calcolo di L_1 e di $\overline{\mathcal{J}}$ nella prossima sezione.

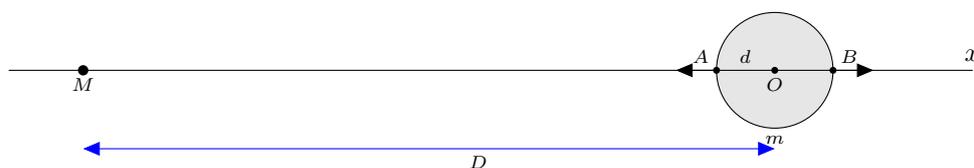


Figura 2.5: Forze mareali del corpo M sui punti A, O, B di m .

2.4 Calcolo del primo punto di Lagrange

Il punto L_1 è un punto di equilibrio nel sistema rotante: rappresenta, dunque, il punto in cui la risultante delle forze in gioco è nulla. Ponendo, in L_1 , un punto massa con velocità iniziale nulla, questo resterebbe in L_1 poiché non è soggetto ad alcuna forza.

È fondamentale osservare che, poiché siamo in un riferimento non inerziale, non abbiamo soltanto le forze di attrazione gravitazionale del primario e del secondario, ma anche la forza centrifuga dovuta alla rotazione del riferimento. Prima di calcolare la posizione di L_1 , è conveniente chiarire il concetto di forze mareali.

2.4.1 Forze mareali

In questa sezione diamo una prima esposizione del concetto di forze di marea, che verrà ripresa più approfonditamente nell'apposito capitolo. In particolare, tratteremo qui solo il caso di due corpi di masse M, m posti a distanza D l'uno dall'altro e soggetti alla mutua forza d'attrazione gravitazionale. Supporremo anche che $M \gg m$, cosicché il centro di massa del sistema coincida con il centro di massa del corpo più massivo, e che m abbia orbita circolare attorno a M (con velocità angolare n). Lavoriamo nel sistema di riferimento non inerziale con origine nel centro di massa e solidale al corpo orbitante.

DEFINIZIONE 2.11 - Sia P un punto del corpo m che si trova sulla congiungente Mm . Definiamo la *forza di marea del corpo M sul punto P di m* la differenza vettoriale tra la forza d'attrazione gravitazionale di M in P e la forza centrifuga in P dovuta alla rotazione di m attorno a M .

Calcoliamo le forze di marea di M su alcuni punti di m .

Supponiamo, in prima approssimazione, che il corpo di massa m sia puntiforme. La terza legge di Keplero risulta essere $n^2 D^3 = GM$, da cui otteniamo

$$n^2 D = \frac{GM}{D^2},$$

cioè la forza d'attrazione gravitazionale di M su m e la forza centrifuga dovuta alla rotazione attorno a M si bilanciano esattamente in m : la forza mareale, in questo caso, è nulla.

Consideriamo, più in generale, il caso in cui m abbia una certa estensione, diciamo sferica di raggio $d \ll D$, e che ruoti attorno a M in modo che ogni punto descriva una circonferenza

centrata in M e di raggio la sua distanza da M ⁶. Indichiamo con O il centro di massa di m e con A e B rispettivamente il punto più vicino e più lontano a M sulla congiungente MO (figura 2.5). Calcoliamo l'accelerazione mareale di M su m in A, B, O :

- in O abbiamo, ancora una volta,

$$\vec{a}_{\text{tide},O} = -\frac{GM}{D^2}\hat{x} + n^2 D\hat{x} = 0;$$

- in A l'attrazione gravitazionale è maggiore:

$$\vec{a}_{\text{tide},A} = -\frac{GM}{(D-d)^2}\hat{x} + n^2(D-d)\hat{x};$$

- in B è la forza centrifuga ad essere maggiore:

$$\vec{a}_{\text{tide},B} = -\frac{GM}{(D+d)^2}\hat{x} + n^2(D+d)\hat{x}.$$

La prossima proposizione ci mostra un risultato sorprendente:

PROPOSIZIONE 2.12 - *Gli sviluppi al prim'ordine delle accelerazioni mareali nei punti A e B sono uguali in modulo e pari a*

$$a_{\text{tide}} = 3\frac{GM}{D^3}d. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Sfruttiamo l'ipotesi $d/D \ll 1$. Sviluppiamo dapprima $a_{\text{tide},A}$:

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{(D-d)^2} + n^2(D-d) &= -\frac{GM}{D^2\left(1-\frac{d}{D}\right)^2} + n^2D\left(1-\frac{d}{D}\right) \\ &\doteq -\frac{GM}{D^2}\left(1+2\frac{d}{D}\right) + n^2D\left(1-\frac{d}{D}\right) \\ &= -\frac{GM}{D^2} - 2\frac{GMd}{D^3} + \frac{GM}{D^2}\left(1-\frac{d}{D}\right) \\ &= -3\frac{GM}{D^3}d, \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato la terza legge di Keplero. Lo sviluppo di $a_{\text{tide},B}$ è analogo e dà luogo allo stesso risultato in modulo. \square

2.4.2 Raggio d'influenza

Siamo finalmente pronti per calcolare la posizione di L_1 . Innanzitutto, esso si trova sulla congiungente primario-secondario, per cui si tratta semplicemente di stabilire quale sia la sua distanza dal primario o, il che è chiaramente equivalente, dal secondario. Poniamo d_1 la distanza di L_1 dal centro del secondario e supponiamo $m_1 \gg m_2$, così il centro di massa risulta essere il corpo m_1 .

⁶È in questo il caso che ci interessa perché siamo interessati a calcolare la forza di marea esclusivamente nei punti sulla congiungente dei centri di massa.

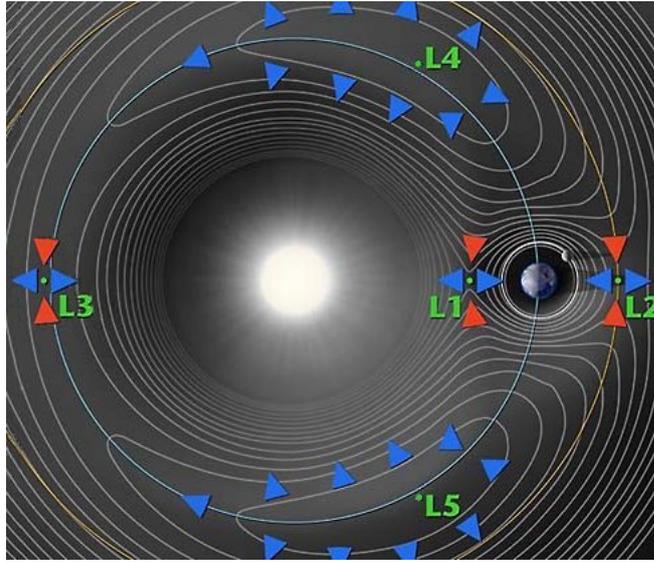


Figura 2.6: I punti di Lagrange nel sistema Sole-Terra.

TEOREMA 2.13 - La distanza del punto L_1 dal centro di massa del secondario soddisfa

$$d_1 \simeq \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{\frac{1}{3}} d. \quad (2.11)$$

Dimostrazione. Per definizione, il punto L_1 è un punto a forza zero, dunque un punto in cui l'accelerazione mareale dovuta al primario e l'accelerazione gravitazionale dovuta al secondario si bilanciano. Imponendo questa condizione, ricordando la (2.10), si ottiene

$$3 \frac{Gm_1}{d^3} d_1 \simeq \frac{Gm_2}{d_1^2},$$

dove il simbolo \simeq è dovuto all'approssimazione al prim'ordine. La tesi segue facilmente. \square

DEFINIZIONE 2.14 - Lo scalare d_1 è chiamato *raggio della sfera d'influenza* del secondario o *raggio di Hill* del secondario.

OSSERVAZIONE 2.15 - Nelle nostre convenzioni, poiché $m_2/m_1 \simeq \mu$, allora

$$d_1 \simeq \left(\frac{\mu}{3} \right)^{\frac{1}{3}} d. \quad (2.12)$$

ESERCIZIO 2.16 - Nel problema dei tre corpi ristretto circolare in cui il primario è il Sole e il secondario è Giove, si calcoli il raggio di Hill di Giove.

Risoluzione. Facciamo i calcoli con le convenzioni adottate fin dall'inizio; supponiamo, cioè, che:

- $m_{\odot} + m_{\mathcal{J}} = 1$;
- $d_{\odot\mathcal{J}} = 1$.

La massa di Giove è circa un millesimo di quella del Sole, per cui possiamo porre $m_{\mathcal{J}} = 10^{-3}$ e $m_{\odot} = 1$. Per la (2.12), abbiamo:

$$d_1 \simeq \left(\frac{m_{\mathcal{J}}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.069,$$

cioè il punto di Lagrange L_1 si trova a distanza $0.93d_{\odot\mathcal{J}}$ dal Sole. \square

2.5 Criterio di stabilità di Hill

Le informazioni che abbiamo ricavato nelle precedenti sezioni possono essere messe insieme per ottenere un utile criterio di stabilità.

Si supponga di avere un problema dei tre corpi ristretto circolare; abbiamo già calcolato la posizione del primo punto di Lagrange ed è semplice ricavare, come vedremo in un esempio, il valore dell'integrale di Jacobi $\overline{\mathcal{J}}$ che dà origine alla curva a forma di "8".

TEOREMA 2.17 (Criterio di stabilità di Hill) - *Consideriamo un problema dei tre corpi ristretto circolare, con primario e secondario di masse m_1, m_2 . Siano $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ e $(\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0)$ le condizioni iniziali del terzo corpo. Se*

$$C_{\sin}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \leq -\overline{\mathcal{J}}, \quad (2.13)$$

allora vale una ed una sola delle seguenti:

1. se il terzo corpo è satellite di m_1 per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi;
2. se il terzo corpo è satellite di m_2 per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi;
3. se il terzo corpo è lontano dalla binaria per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi.

Dimostrazione. La condizione (2.13) dice che il valore dell'integrale di Jacobi per il terzo corpo è maggiore od uguale al valore critico in cui le sfere attorno a m_1 e m_2 si toccano. Per quanto visto nella sezione 2.3.2, il moto del terzo corpo è confinato o all'interno di una sfera attorno a m_1 , o all'interno di una sfera attorno a m_2 o al di fuori di una sfera attorno all'intera binaria. A seconda del valore di $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, si ottiene una delle alternative. Chiaramente, per continuità del moto, non è possibile che ne valgano due contemporaneamente. \square

ESERCIZIO 2.18 - Si calcoli il valore dell'integrale di Jacobi corrispondente alla curva passante per L_1 nel problema dei tre corpi ristretto circolare Sole-Giove-asteroide.

Risoluzione. È sufficiente calcolare il valore dell'integrale di Jacobi per un asteroide che si trovi all'istante iniziale in L_1 e che abbia velocità nulla nel riferimento sinodico.

Come si vede facilmente dalla figura 2.7, abbiamo che $L_1 = (1 - \mu - d_1, 0)$; conseguentemente, ricordando che $\mu = m_{\mathcal{J}} = 10^{-3}$, abbiamo che

$$\overline{\mathcal{J}} = -\overline{C} = \underbrace{\frac{1}{2}(1 - \mu - d_1)^2}_{0.432} + \underbrace{\frac{\mu}{d_1}}_{1.44 \cdot 10^{-2}} + \underbrace{\frac{1 - \mu}{1 - d_1}}_{1.07} = 1.52.$$

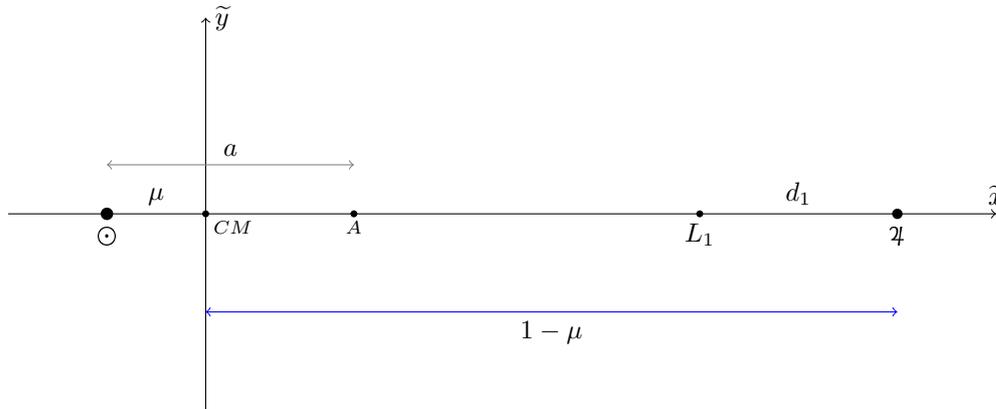


Figura 2.7: Sole, Giove, primo punto di Lagrange.

a	$\mathcal{I}(a)$
0.30	2.214
0.40	1.882
0.50	1.707
0.60	1.609
0.62	1.595
0.80	1.523
0.81	1.521
0.85	1.515

Tabella 2.1: Valori di semiassi di asteroidi orbitanti attorno al Sole e corrispondenti valori di \mathcal{I} .

Osserviamo che il contributo più importante per il valore di $\overline{\mathcal{I}}$ è dato dal potenziale gravitazionale del Sole, poi dal potenziale centrifugo e, in ultima istanza, dal potenziale gravitazionale di Giove. \square

Vediamo adesso un'applicazione del criterio di stabilità di Hill, che presenteremo sotto forma di esercizio

ESERCIZIO 2.19 - Si consideri, nel problema ristretto circolare Sole-Giove, un asteroide che, all'istante iniziale, è in rotazione attorno al Sole con orbita circolare di raggio a (si trascuri, all'istante iniziale, l'influenza di Giove). Si determinino i possibili valori di a per cui, nel futuro, l'asteroide resta sotto l'influenza del Sole.

Risoluzione. In prima istanza, si potrebbe pensare che sono ammessi valori di a fino a distanza $1 - d_1$, cioè fino a che non si entra nella sfera d'influenza di Giove. Vedremo che non è così. Nel riferimento fisso, assunto coincidente col riferimento rotante all'istante iniziale, le condizioni

iniziali sono

$$(x_0, y_0) = (a - \mu, 0), \quad (\dot{x}_0, \dot{y}_0) = \left(0, \sqrt{\frac{Gm_\odot}{a}} \right) = \left(0, \frac{(1 - \mu)^{1/2}}{a^{1/2}} \right).$$

Nel riferimento rotante, ricordando le (2.7) e le (2.8), abbiamo che le condizioni iniziali sono

$$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (a - \mu, 0), \quad (\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0) = \left(0, \frac{(1 - \mu)^{1/2}}{a^{1/2}} - a \right).$$

Il valore dell'integrale di Jacobi risulta essere:

$$\mathcal{J}(a) = \frac{1 - \mu}{2a} + \frac{\mu}{1 - a} + \sqrt{(1 - \mu)a} - a\mu.$$

Per il criterio di stabilità di Hill, si sa che se $\mathcal{J}(a) > \overline{\mathcal{J}} = 1.52$, allora l'asteroide resta sotto l'influenza del Sole. Come si vede dalla tabella 2.1, che riporta per diversi valori di a i corrispondenti valori dell'integrale di Jacobi, l'ultimo valore ammissibile è $a = 0.81$. Tale dato ha un riscontro sperimentale: è noto che l'ultimo asteroide della fascia degli asteroidi tra Marte e Giove si trova esattamente a distanza $0.81d_{\odot\mathcal{A}}$ dal Sole, ed è l'asteroide denominato Thule. \square

ESERCIZIO 2.20 - Si calcoli il raggio della sfera d'influenza della Terra nel sistema a tre corpi Sole-Terra-Luna e lo si confronti con la distanza Terra-Luna.

Risoluzione. Indichiamo con $R_{\text{si}\oplus}$ il raggio della sfera d'influenza della Terra. Per la (2.11), abbiamo:

$$R_{\text{si}\oplus} \simeq d_{\odot\oplus} \left(\frac{m_\oplus}{3m_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.5 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^{-6}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 1.5 \cdot 10^9 m.$$

Pertanto,

$$\frac{d_{\oplus\mathcal{L}}}{R_{\text{si}\oplus}} \simeq 0.26.$$

Concludiamo che la Luna si trova molto vicino alla Terra rispetto alla sua sfera d'influenza: ciò è tipico dei satelliti naturali di tutti i pianeti. \square

CAPITOLO 3

LE MAREE

In questo capitolo discuteremo delle forze di marea, fondamentali nella descrizione dei fenomeni di meccanica celeste. Le definiremo e le calcoleremo, descrivendone gli effetti nel caso Terra-Luna.

3.1 Potenziale mareale

Scopo di questa sezione è definire rigorosamente il concetto di potenziale mareale. In generale, il potenziale mareale è originato da una non uniformità del potenziale gravitazionale e del potenziale centrifugo: differenze di potenziale gravitazionale o differenze di potenziale centrifugo danno luogo ad un potenziale mareale non banale. Nel seguito cominceremo col descrivere il potenziale mareale nel caso di un corpo rotante con assetto fisso, in cui il potenziale centrifugo non interviene. Seguirà una discussione sul caso corotante, in cui anche il potenziale centrifugo darà un contributo non banale.

3.1.1 Caso di assetto fisso

Premettiamo una definizione:

DEFINIZIONE 3.1 - Un corpo sferico di raggio r , posto a distanza R da un corpo puntiforme attorno al quale ruota con orbita circolare si dice che ha un *assetto fisso* (*space-fixed*) se ogni punto $P = O + \vec{r}_P$ della sua superficie compie un'orbita circolare di raggio R attorno al punto $M + \vec{r}_P$.

Consideriamo il sistema composto da un corpo puntiforme di massa M e da un corpo sferico omogeneo di massa m soggetti alla mutua attrazione gravitazionale. Supponiamo che $m \ll M$, in modo che il centro di massa del sistema sia approssimabile con M , e che m compia un'orbita circolare di raggio R attorno a M . Consideriamo l'approssimazione $r \ll R$, dove r è il raggio del corpo sferico e supponiamo che il corpo m mantenga un *assetto fisso* rispetto alle stelle fisse. Come nella figura 3.1, indichiamo con P un generico punto della superficie di m e con \vec{r} la sua distanza da O .

Studiamo le forze di marea che il corpo M esercita sul corpo m , trascurando quelle che m esercita

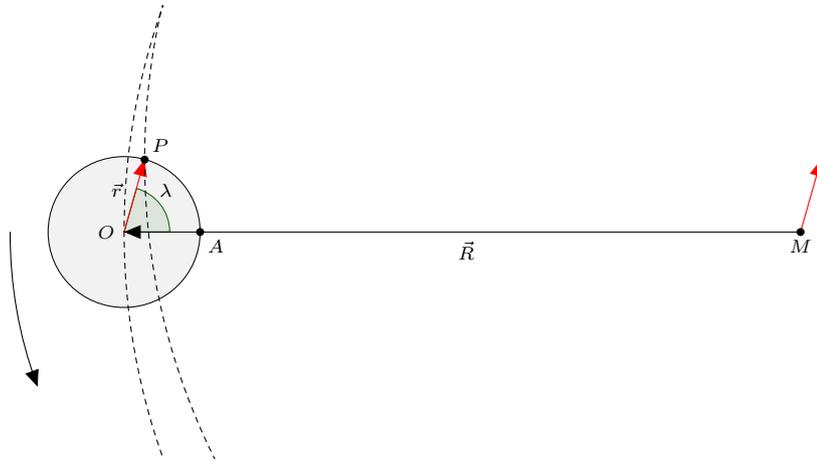


Figura 3.1: Il corpo esteso m ruota attorno a M con assetto fisso: il punto O descrive una circonferenza di raggio R attorno ad M , mentre il punto P descrive una circonferenza dello stesso raggio attorno a $M + \vec{r}$.

su M . Come vedremo in seguito, le due diverse forze di marea hanno effetti che sono facilmente “separabili”, e quindi possono essere studiati separatamente.

OSSERVAZIONE 3.2 - Come effetto dell’ipotesi di assetto fisso, abbiamo che la differenza di potenziale centrifugo tra due punti antipodali della superficie di m è nulla. Questo porterà a non far intervenire il potenziale centrifugo nel potenziale mareale di M su m .

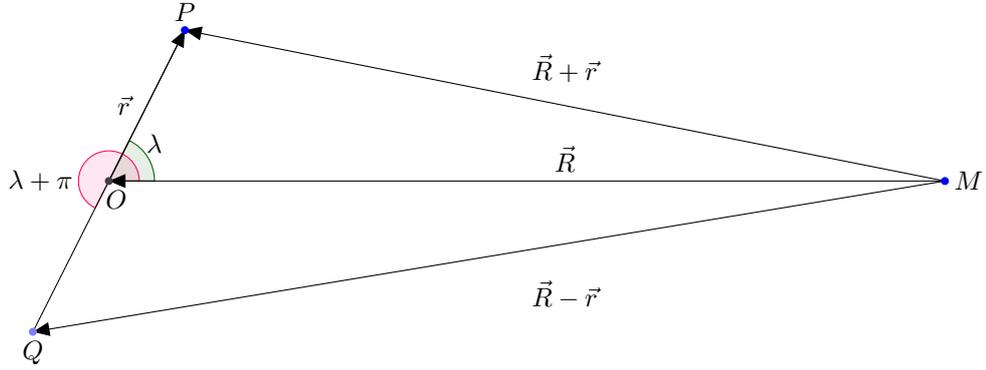
DEFINIZIONE 3.3 - Il *potenziale mareale gravitazionale* nel punto P è la differenza di potenziale gravitazionale nel punto P e nel punto O :

$$\phi_{\text{tide,G}}(P) := \phi_G(P) - \phi_G(O).$$

Per effettuare il calcolo, consideriamo una situazione semplificata: supponiamo che tutta la massa del corpo esteso sia concentrata nel suo centro di massa e calcoliamo il potenziale mareale in un punto P e nel suo antipodale (figura 3.2). Nel piano che contiene O, P e M , il punto P è univocamente determinato dalla sua distanza da O e dall’angolo λ che forma con la congiungente OM . In questo modo, anche il suo antipodale è univocamente determinato.

Chiaramente valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}\phi_G(P) &= -\frac{GM}{|\vec{R} + \vec{r}|}, \\ \phi_G(Q) &= -\frac{GM}{|\vec{R} - \vec{r}|}, \\ \phi_G(O) &= -\frac{GM}{R}.\end{aligned}$$

Figura 3.2: Situazione semplificata di massa concentrata in O .

Vogliamo calcolare uno sviluppo al second'ordine di queste espressioni. Nell'approssimazione $r/R \ll 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} |\vec{R} - \vec{r}|^{-1} &= (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \lambda)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} \left(1 + \underbrace{\frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \lambda}_{=: \epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{8} \epsilon^2 + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \lambda - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \lambda + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right) \end{aligned}$$

e, omettendo gli analoghi passaggi,

$$|\vec{R} + \vec{r}|^{-1} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \lambda - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \lambda + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right).$$

Calcoliamo il potenziale mareale gravitazionale in P e in Q :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{tide,G}}(P) &= \phi_G(P) - \phi_G(O) = -\frac{GM}{R} \left(-\frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right), \\ \phi_{\text{tide,G}}(Q) &= \phi_G(Q) - \phi_G(O) = -\frac{GM}{R} \left(\frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.4 - In realtà, il termine di monopoio $\frac{r}{R} \cos \lambda$ non dà contributo nel potenziale mareale gravitazionale. Per meglio capire ciò, calcoliamo le accelerazioni mareali in due punti antipodali: osserveremo che la differenza dei contributi dati dai termini di monopoio è nulla, per cui non ci possono essere effetti mareali sul corpo. Per effettuare il calcolo, usiamo coordinate polari e calcoliamo le componenti radiali e trasverse derivando il termine di monopoio del potenziale mareale rispetto a r e rispetto a λ (introduciamo l'apice "m" per ricordare che stiamo considerando solo i termini di monopoio).

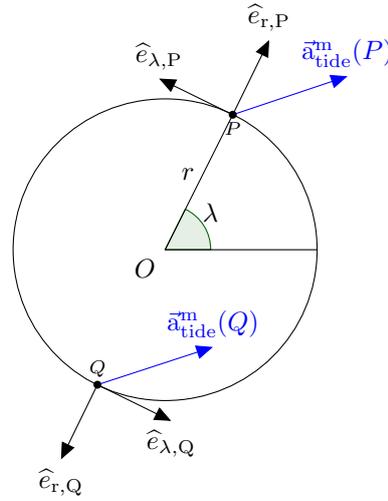


Figura 3.3: I contributi dati alle accelerazioni mareali dai termini di monopolo: la loro differenza è nulla.

In P :

$$a_{\text{tide},r}^m = -\frac{\partial\phi^m}{\partial r}(r, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \cos \lambda, \quad a_{\text{tide},t}^m = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi^m}{\partial \lambda}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R^2} \sin \lambda;$$

in Q :

$$a_{\text{tide},r}^m = -\frac{\partial\phi^m}{\partial r}(r, \lambda + \pi) = -\frac{GM}{R^2} \cos \lambda, \quad a_{\text{tide},t}^m = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi^m}{\partial \lambda + \pi}(r, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sin \lambda.$$

Rispetto ai riferimenti di coordinate polari in P e in Q , le componenti dell'accelerazione di marea così calcolate sono uguali in modulo e concordi nella direzione, dunque la loro differenza è nulla (figura 3.3).

Grazie all'osservazione precedente, concludiamo che, nel caso space-fixed, il potenziale mareale gravitazionale ha, a meno di termini di ordine superiore a $O(r^3/R^3)$, la seguente espressione:

$$\phi_{\text{tide},G}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}, \quad (3.1)$$

e coincide, per l'osservazione 3.2, col potenziale mareale totale.

3.1.2 Caso corotante

Consideriamo lo stesso sistema di prima, con le stesse approssimazioni, ma facciamo l'ipotesi che il corpo m sia *corotante* col corpo M che produce la marea: supponiamo, cioè, che la velocità angolare media di rotazione attorno a M , indicata con n_{orb} , sia uguale in modulo, direzione e verso alla velocità angolare di rotazione di m attorno all'asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per O , indicata con ω_{spin} . In altre parole, supponiamo che m volga sempre la stessa faccia a M .

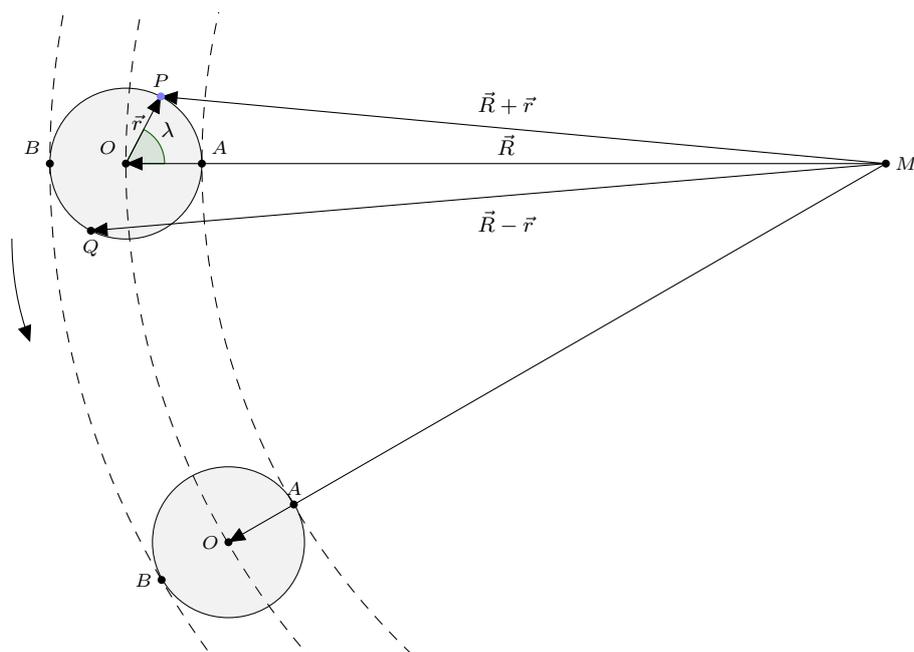


Figura 3.4: Il corpo m è corotante con M .

OSSERVAZIONE 3.5 - È evidente (figura 3.4) che ogni punto della superficie di m percorre una circonferenza di centro M e raggio pari alla sua distanza da M . Da ciò segue che la differenza di potenziale centrifugo tra punti antipodali è, in generale, non nulla e, dunque, ne dovremo tenere conto nel calcolo del potenziale mareale.

In maniera analoga a prima, definiamo un potenziale mareale centrifugo.

DEFINIZIONE 3.6 - Il *potenziale mareale centrifugo* nel punto P è la differenza di potenziale centrifugo nel punto P e nel punto O :

$$\phi_{\text{tide,C}}(P) := \phi_{\text{C}}(P) - \phi_{\text{C}}(O).$$

Nel nostro caso (figura 3.4), abbiamo che:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{C}}(P) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 \left| \vec{R} + \vec{r} \right|^2; \\ \phi_{\text{C}}(Q) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 \left| \vec{R} - \vec{r} \right|^2; \\ \phi_{\text{C}}(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 R^2.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\phi_{\text{C}}(P) - \phi_{\text{C}}(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (r^2 + 2Rr \cos \lambda); \\ \phi_{\text{C}}(Q) - \phi_{\text{C}}(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (r^2 - 2Rr \cos \lambda).\end{aligned}$$

Per un ragionamento analogo a quello dell'osservazione 3.4, gli addendi proporzionali a $Rr \cos \lambda$ non danno contributo nelle forze mareali, quindi concludiamo che

$$\phi_{\text{tide,C}}(r, \lambda) = -\frac{1}{2} n_{\text{orb}}^2 r^2 = -\frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2, \quad (3.2)$$

dove abbiamo usato la terza legge di Keplero $n_{\text{orb}}^2 R^3 = GM$. Il potenziale mareale totale¹ nel caso corotante sarà la somma del potenziale mareale gravitazionale (3.1) e di quello mareale centrifugo (3.2):

$$\phi_{\text{tide}}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}. \quad (3.3)$$

3.2 Forze di marea

In questa sezione studieremo il campo delle forze mareali nei casi che abbiamo considerato precedentemente.

3.2.1 Caso ad assetto fisso

Abbiamo già calcolato il potenziale mareale nel caso ad assetto fisso: è dato dalla

$$\phi_{\text{tide}}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}.$$

Calcoliamo, adesso, le componenti radiale e trasversa dell'accelerazione mareale e vediamo come dipendono dalla longitudine λ .

Componente radiale

Per quanto riguarda la componente radiale, essa ha espressione

$$a_r(r, \lambda) = -\frac{\partial \phi_{\text{tide}}}{\partial r}(r, \lambda) = 2 \frac{GM r}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}.$$

Dall'andamento della funzione $f_1(\lambda) := (3 \cos^2 \lambda - 1)/2$ (figura 3.5), si deduce che la componente radiale dell'accelerazione mareale è (figura 3.6):

se $\lambda = 0, \pi$ di verso opposto alla forza gravitazionale di M e di modulo massimo, pari a $2GM r/R^3$;

se $\lambda = \pi/2, 3\pi/2$ dello stesso verso della forza gravitazionale di M e di modulo minimo, pari a $GM r/R^3$;

se $\lambda = \arccos(1/\sqrt{3}) (\simeq 55^\circ), \arccos(-1/\sqrt{3})$ nulla.

ESERCIZIO 3.7 - Valutare, nel caso delle maree prodotte dalla Luna sulla Terra e nel caso delle maree prodotte dal Sole sulla Terra, il rapporto tra componente radiale dell'accelerazione mareale e accelerazione gravitazionale in prossimità della superficie terrestre.

¹a meno di termini di ordine $O(r^3/R^3)$.

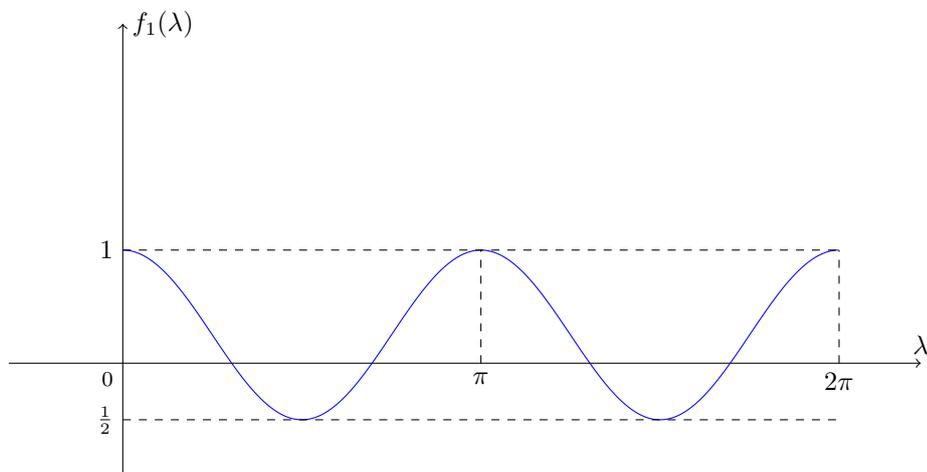


Figura 3.5: Grafico della funzione $f_1(\lambda) := (3 \cos^2 \lambda - 1)/2$.

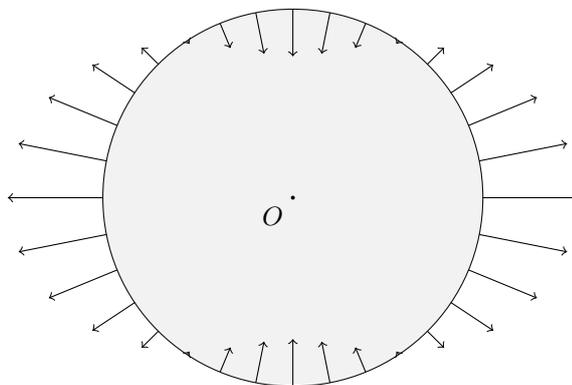


Figura 3.6: Componente radiale dell'accelerazione di marea sul piano equatoriale, caso ad assetto fisso.

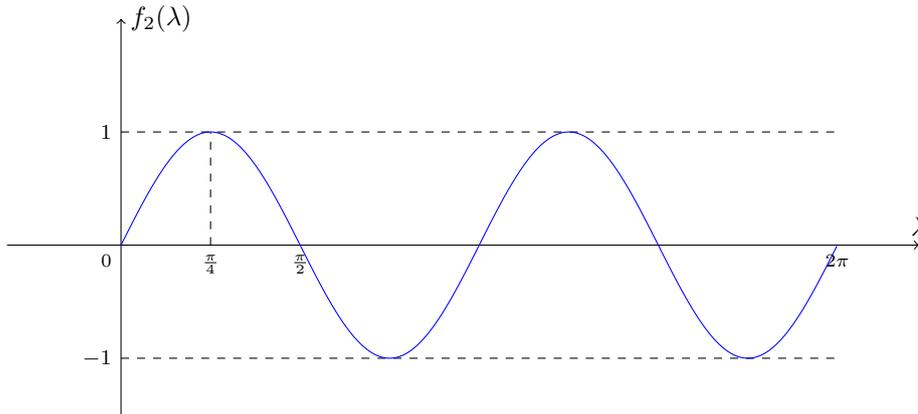


Figura 3.7: Grafico della funzione $f_2(\lambda) := \sin(2\lambda)$.

Risoluzione. Nel primo caso, si tratta di valutare la quantità

$$\frac{\frac{2Gm_{\zeta}R_{\oplus}}{d_{\oplus\zeta}^3}}{\frac{Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} = 2 \frac{m_{\zeta}}{m_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}^3}{d_{\oplus\zeta}^3}.$$

Prima di effettuare il calcolo, osserviamo che tale rapporto cresce proporzionalmente con la massa del corpo che genera la marea (la Luna, in questo caso) e diminuisce al crescere della distanza reciproca tra i due corpi.

Sostituendo i dati che conosciamo, otteniamo il valore $1.2 \cdot 10^{-7}$. Ne segue che, nei giorni in cui la Luna si trova allo zenit, pesiamo un decimilionesimo in meno rispetto al nostro peso reale.

Nel secondo caso, dobbiamo calcolare

$$\frac{\frac{2Gm_{\odot}R_{\oplus}}{d_{\oplus\odot}^3}}{\frac{Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} = 2 \frac{m_{\odot}}{m_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}^3}{d_{\oplus\odot}^3} \simeq 5.4 \cdot 10^{-8}.$$

È facile, a questo punto, controllare il rapporto tra le componenti radiali delle accelerazioni mareali lunare e solare: si tratta del numero

$$\frac{1.2 \cdot 10^{-7}}{5.4 \cdot 10^{-8}} \simeq 2.2.$$

□

Componente trasversa

La componente trasversa dell'accelerazione mareale nel caso ad assetto fisso è

$$a_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{\text{tide}}}{\partial \lambda} = -3 \frac{GMr}{R^3} \cos \lambda \sin \lambda = -\frac{3}{2} \frac{GMr}{R^3} \sin 2\lambda.$$

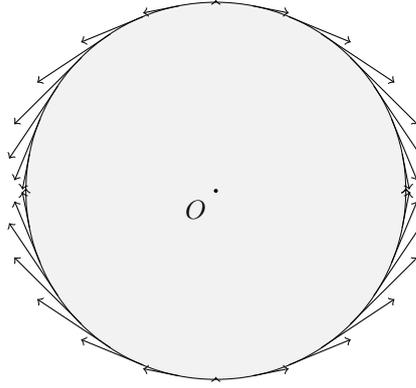


Figura 3.8: Componente trasversale dell'accelerazione di marea sul piano equatoriale, caso di assetto fisso.

Quindi, nel piano equatoriale del corpo esteso, l'andamento della forza di marea è quello della funzione $f_2(\lambda) := \sin 2\lambda$, che si annulla per $\lambda = k\pi/2$ ed è massima per $\lambda = \pi/4 + k\pi/2$, dove $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (figura 3.7). Come si osserva dalla figura 3.8, la componente trasversale dell'accelerazione di marea causa rigonfiamenti (anche chiamati *bulges*) mareali lungo la congiungente tra i due corpi sia per longitudine $\lambda = 0$ (verso lo *zenit*), che per longitudine $\lambda = \pi$ (verso lo *nadir*).

OSSERVAZIONE 3.8 - Il fatto che le funzioni di λ coinvolte siano sempre π -periodiche significa che la marea risultante avrà un periodo pari alla metà del *periodo sinodico* del corpo, cioè l'intervallo di tempo dopo il quale un osservatore sul corpo esteso di ritrova nella stessa posizione rispetto al corpo che genera la marea. Nel caso in cui si consideri la Terra come corpo esteso e la marea generata sull'equatore terrestre dal Sole o dalla Luna, il periodo della marea sarà la metà del giorno solare nel primo caso e la metà del *periodo sinodico della Luna* nel secondo caso (si veda l'appendice A).

3.2.2 Caso corotante

Abbiamo precedentemente calcolato il potenziale mareale nel caso $\omega_{\text{spin}} = n_{\text{orb}}$:

$$\phi_{\text{tide}}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}.$$

Studiamo anche in questo caso separatamente le componenti radiale e trasversale dell'accelerazione mareale.

Per la componente radiale, vale

$$a_r(r, \lambda) = -\frac{\partial \phi_{\text{tide}}}{\partial r} = 3 \frac{GM}{R^3} r \cos^2 \lambda.$$

Si osservi che, per $\lambda = 0, \pi$, abbiamo ritrovato il risultato della proposizione 2.12.

Come prima, uno studio della funzione $g(\lambda) := \cos^2 \lambda$ (figura 3.9) ci dà informazioni sul modulo della componente radiale (figura 3.10):

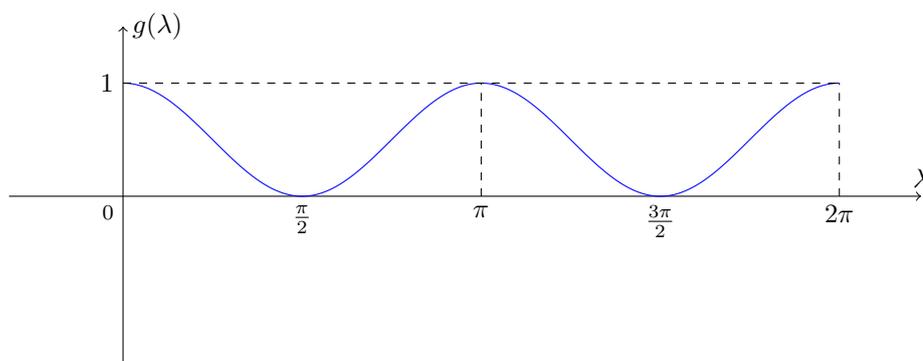


Figura 3.9: Grafico della funzione $g(\lambda) := \cos^2 \lambda$.

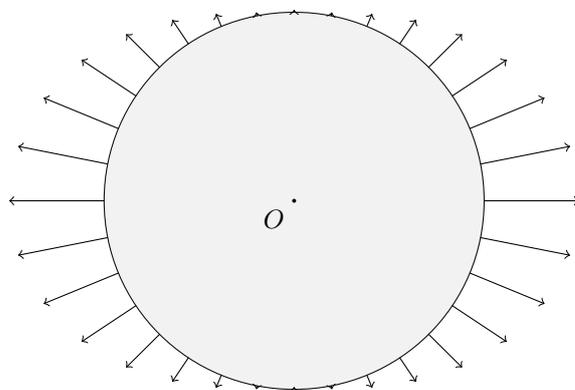


Figura 3.10: Componente radiale dell'accelerazione di marea, caso corotante.

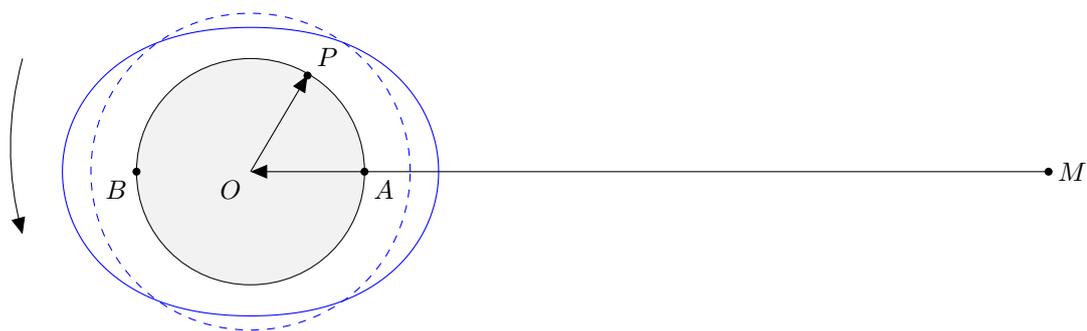


Figura 3.11: Superficie equipotenziale nel caso di assetto fisso.

- è massimo e vale $3GMr/R^3$ se $\lambda = 0, \pi$;
- è minimo e nullo se $\lambda = \pi/2, 3\pi/2$.

La componente trasversa ha lo stesso andamento del caso ad assetto fisso.

3.3 Effetti mareali

In questa sezione ci dedichiamo allo studio di uno dei principali effetti delle forze mareali: lo spostamento delle acque. Lo studieremo sia nel caso ad assetto fisso, sia nel caso corotante. Combinando i due, otterremo il caso della Terra.

3.3.1 Caso ad assetto fisso

Supponiamo che il corpo esteso, orbitante con assetto fisso attorno al corpo di massa M , sia ricoperto di un sottile strato di *fluido perfetto*, capace di rispondere istantaneamente alla forza di marea. Per effetto delle forze mareali, ogni punto massa di questo fluido si sposterà fino a raggiungere una certa posizione di equilibrio. Se indichiamo con g l'accelerazione gravitazionale in prossimità della superficie del corpo esteso, il fluido raggiungerà una certa altezza h , dipendente da r e λ , tale che

$$gh(r, \lambda) = -\phi_{\text{tide}}(r, \lambda).$$

Otteniamo un'espressione per l'altezza della marea all'equatore:

$$h(r, \lambda) = \frac{1}{g} \frac{GMr^2}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}. \quad (3.4)$$

OSSERVAZIONE 3.9 - Tale quantità dipende dalla longitudine λ con la funzione $f(\lambda)$, il cui grafico si trova nella figura 3.5. La superficie equipotenziale ottenuta si trova in figura 3.11: osserviamo che il massimo valore dell'altezza è ottenuto nei punti situati sulla congiungente OM . Per ipotesi di assetto fisso, tali punti non sono sempre gli stessi durante l'orbita, ma torneranno nella situazione di partenza solo dopo un giro. Poiché la funzione f è π -periodica, però, ogni punto compie un ciclo completo di marea in *metà* periodo orbitale di m attorno a M .

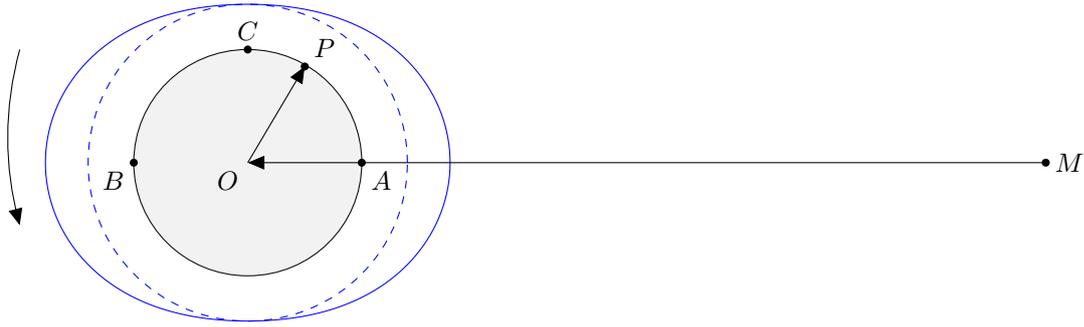


Figura 3.12: Superficie equipotenziale nel caso corotante.

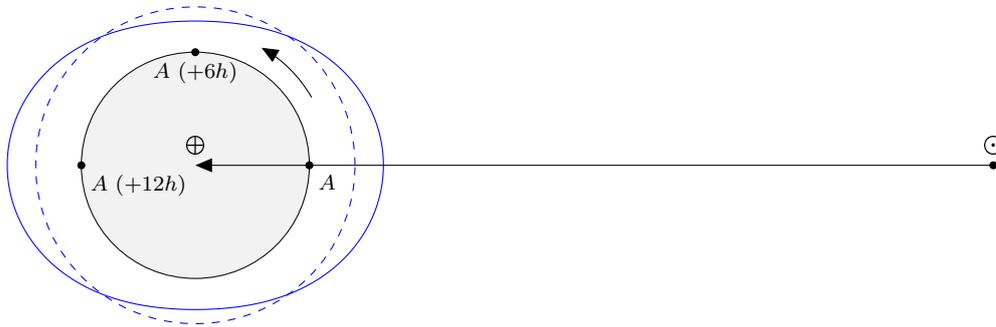


Figura 3.13: Effetti mareali nel caso Terra-Sole.

3.3.2 Caso corotante

Analizziamo, adesso, il caso corotante. Con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente, si ottiene che l'altezza di marea è

$$h(r, \lambda) = \frac{1}{g} \frac{GMr^2}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}.$$

OSSERVAZIONE 3.10 - In questo caso, l'altezza cambia come la funzione g di figura 3.9. Si osservi che, durante l'orbita, i punti A e B (cfr. figura 3.12) restano sulla congiungente OM , per cui per loro si ha *sempre* il massimo della marea; analogamente, l'altezza di marea è sempre minima in C .

3.3.3 Il caso della Terra

Vogliamo studiare gli effetti mareali del Sole e della Luna sulla Terra, supponendo che quest'ultima sia ricoperta di un fluido perfetto che risponde istantaneamente alla forza di marea. In linea di principio, questo non rientra in nessuno dei casi precedenti, in quanto la Terra ruota attorno a se stessa con una velocità angolare ω_{spin} non nulla e diversa dalle velocità angolari medie di rotazione $n_{\text{orb}, \oplus \odot}$ e $n_{\text{orb}, \oplus \ominus}$. Possiamo sfruttare il fatto che la velocità di rotazione della Terra

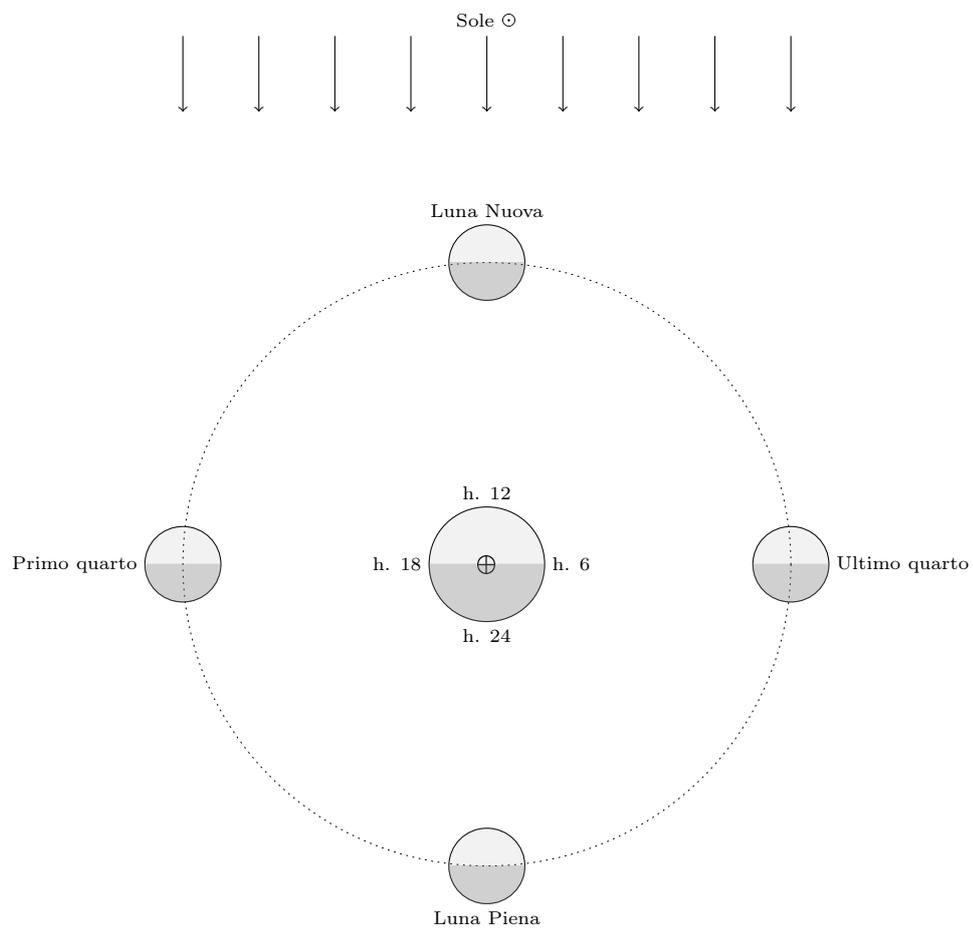


Figura 3.14: Le Fasi Lunari. Sono rappresentati i punti della Terra in cui è alba, mezzogiorno, tramonto, mezzanotte.

attorno al proprio asse è molto maggiore delle velocità angolari medie degli altri due corpi²: si può pensare che in 24 ore la Terra sia fissa rispetto a questi due corpi e quindi possiamo immaginare che il loro effetto mareale sulla Terra sia come quello nel caso ad assetto fisso, cioè con potenziale dato dalla (3.1). A questo punto, teniamo conto della rotazione della Terra attorno al proprio asse per ottenere la periodicità con cui si verificano i fenomeni mareali.

- Nel caso Terra-Sole ogni punto compie un ciclo completo di marea in 12 ore, in quanto il giorno solare è di 24 ore;
- nel caso Terra-Luna ogni punto compie un ciclo completo di marea in 12 ore e 25 minuti, in quanto il giorno sinodico lunare è di 24 ore e 50 minuti (si veda l'appendice A).

Calcoliamo, adesso, le ampiezze delle maree del Sole e della Luna sulla Terra. Abbiamo già osservato che

$$\frac{\phi_{\text{tide}\zeta}}{\phi_{\text{tide}\odot}} \simeq 2.2;$$

inoltre, abbiamo che

$$h_{\text{max}\odot} = \frac{1}{g} \frac{Gm_{\odot} R_{\oplus}^2}{d_{\oplus\odot}^3} \simeq 16.3 \text{ cm}$$

$$\left| h_{\text{min}\odot} \right| = \frac{1}{2} h_{\text{max}\odot} \simeq 8.2 \text{ cm}.$$

Da ciò segue che

$$h_{\text{max}\zeta} = 2.2 \cdot h_{\text{max}\odot} \simeq 24.5 \text{ cm}$$

$$\left| h_{\text{min}\zeta} \right| = 2.2 \cdot \left| h_{\text{min}\odot} \right| \simeq 18 \text{ cm}.$$

Otteniamo i seguenti valori per le ampiezze di marea:

$$A_{\odot} \simeq 24.5 \text{ cm}$$

$$A_{\zeta} \simeq 54 \text{ cm}.$$

Naturalmente, tali effetti mareali interagiscono tra di loro.

- Nelle fasi di *Luna Piena* e *Luna Nuova* (in cui, rispettivamente, la Terra si trova tra Sole e Luna e la Luna si trova tra Terra e Sole, figura 3.14) gli effetti mareali si sommano e l'ampiezza di marea può raggiungere, a mezzanotte e a mezzogiorno, in mare aperto e in fondali di profondità non variabile, il valore

$$A_{\odot} + A_{\zeta} \simeq 78 \text{ cm}.$$

- Nelle fasi di *quadratura*, quando Terra, Sole e Luna formano un triangolo rettangolo, accade che all'alba e al tramonto la marea lunare è massima, mentre la marea solare è minima. Invece, a mezzogiorno e mezzanotte è massima la marea solare e minima quella lunare. È evidente che la marea complessiva sarà minima sulla Terra.

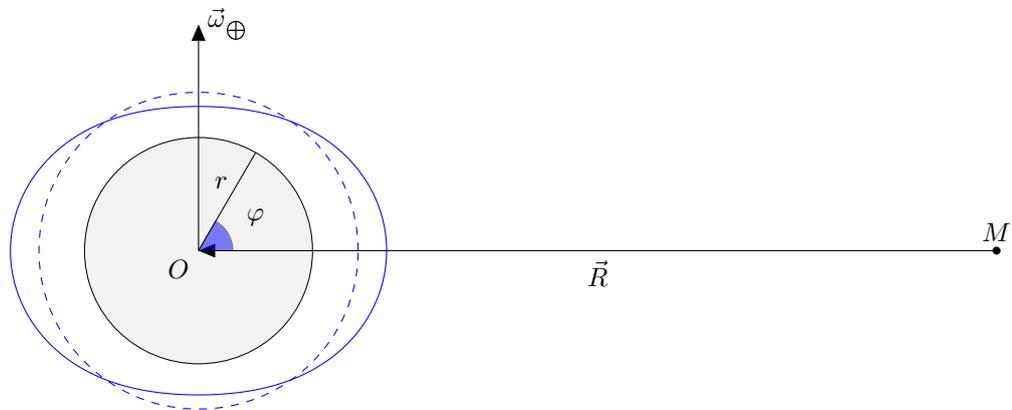


Figura 3.15: Superficie equipotenziale in un meridiano terrestre.

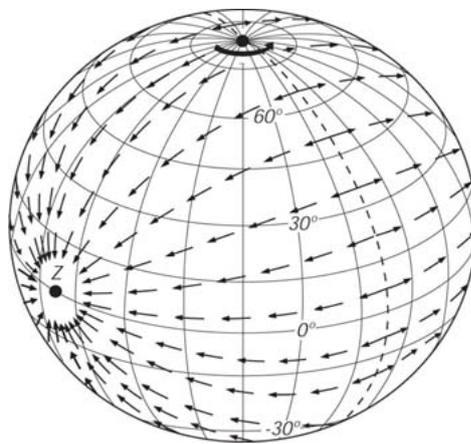


Figura 3.16: Componente trasversa dell'accelerazione mareale sulla Terra.

Possiamo anche considerare la marea nel meridiano individuato dal vettore \vec{R} e dall'asse di rotazione della Terra, in funzione di r e della latitudine φ (figura 3.15). Si può rifare lo stesso ragionamento precedentemente fatto per l'equatore e ottenere un risultato perfettamente analogo, in cui il potenziale mareale è dato da

$$\phi_{\text{tide}}(r, \varphi) = \frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2},$$

che darà luogo ad un'altezza di marea

$$h_{\text{tide}}(r, \varphi) = \frac{1}{g} \frac{GM}{R^2} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2}$$

e ad una superficie equipotenziale come in figura 3.15. A questo punto, è facile convincersi che la componente trasversa dell'accelerazione di marea sulla Terra sferica deve essere come in figura 3.16, dando luogo ad una superficie equipotenziale tridimensionale con due lobi in corrispondenza dello *zenit* e del *nadir*.

3.4 Attrito delle maree

Nello studio degli effetti mareali abbiamo sempre ipotizzato di essere in presenza di un fluido perfetto, capace di rispondere istantaneamente alla forza di marea; in questo caso, abbiamo visto che i lobi mareali (in seguito chiamati anche *bulges*) seguono sempre il moto del generatore della marea.

In questa sezione descriveremo, in maniera quasi esclusivamente qualitativa, cosa accade rimuovendo questa ipotesi: supporremo, cioè, di avere attrito non nullo tra la terra solida e il fluido soprastante.

3.4.1 Caso della rotazione veloce

Analizziamo il caso in cui il corpo esteso su cui agisce la marea ruoti molto più lentamente attorno al corpo generatore della marea di quanto non lo faccia attorno a se stesso e che queste rotazioni avvengano nello stesso piano. Supponiamo, cioè, che $\omega_{\text{spin}} \gg n_{\text{orb}}$ e che questi vettori siano paralleli e dello stesso verso. È evidente che i lobi mareali saranno trascinati in avanti, rispetto alla congiungente dei centri di massa, dalla rotazione del corpo attorno a se stesso (figura 3.17). A causa della diversa distanza dal corpo M , questi lobi saranno allora soggetti a forze di attrazione gravitazionali da parte di M diverse in modulo e direzione. Si creerà, quindi, un momento non nullo \vec{N} , del cui modulo possiamo stabilire una relazione di proporzionalità.

PROPOSIZIONE 3.11 - *Per il modulo del momento N vale la seguente relazione di proporzionalità:*

$$N \propto \frac{r^5}{R^6}.$$

Dimostrazione. Una prima proporzionalità con $1/R^3$ ce l'abbiamo grazie al fatto che la differenza di forze gravitazionali sui *bulges* mareali è una marea, e dunque proporzionale all'inverso del cubo della distanza dal corpo che la genera.

²Basti pensare che in un giorno la Terra spazza circa 1° nella sua orbita attorno al Sole.

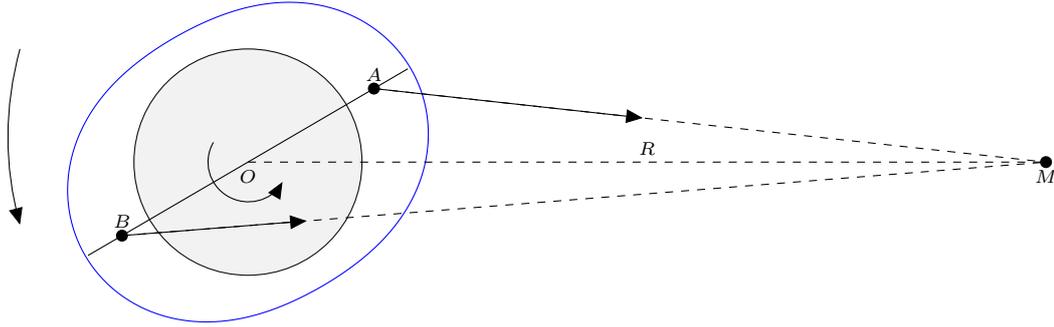


Figura 3.17: Attrito delle maree: caso di rotazione veloce.

Una seconda proporzionalità con $1/R^3$ ce l'abbiamo perché N sarà sicuramente proporzionale alla massa dei *bulges*, che a sua volta è proporzionale alla loro altezza, che dipende dal potenziale mareale, proporzionale a $1/R^3$.

Inoltre, N è proporzionale a r perché r è il braccio della coppia di forze agente sui lobi.

Infine, poiché N è proporzionale alla massa dei *bulges*, abbiamo:

$$N \propto m_{\text{bulges}} \propto h_{\text{tide}} = \frac{\phi_{\text{tide}}}{g} \propto \frac{r^2}{g}$$

e basta osservare che g è proporzionale a $1/r^2$. □

OSSERVAZIONI 3.12 - - Il sistema Terra-Luna rientra in questo caso. Infatti,

$$\omega_{\text{spin}, \oplus} \simeq 29n_{\text{orb}, \oplus}.$$

- Una prima immediata conseguenza dell'attrito delle maree è l'allungamento del giorno nel corpo rotante. Ciò è dovuto alla presenza del momento N , che causa una diminuzione della velocità angolare di rotazione ω_{spin} .
- Ricordiamo che il momento angolare totale del sistema, dato dalla somma di una componente dovuta alla rotazione propria del corpo m e da una componente dovuta alla rotazione attorno a M , deve conservarsi. Come abbiamo appena visto, la prima componente diminuisce in modulo, quindi l'altra dovrà aumentare: come conseguenza, ricordando la (1.5), il semiasse maggiore dell'orbita dovrà aumentare a sua volta. Pertanto, i due corpi tenderanno ad allontanarsi. In effetti, questo è ciò che accade al sistema Terra-Luna.

3.4.2 Caso della rotazione lenta

Consideriamo adesso il caso in cui il corpo su cui studiamo la marea ha una velocità di rotazione propria molto minore della rotazione attorno al corpo generatore di marea: $\omega_{\text{spin}} \ll n_{\text{orb}}$. A causa dell'attrito, i lobi mareali resteranno indietro rispetto alla congiungente dei centri dei due corpi (figura 3.18).

Anche in questo caso ci sarà un momento N , soddisfacente alla stessa relazione di proporzionalità di prima, ma il cui effetto è quello di *aumentare* la velocità di rotazione propria del corpo. Per la conservazione del momento angolare totale, la distanza tra i due corpi dovrà diminuire.

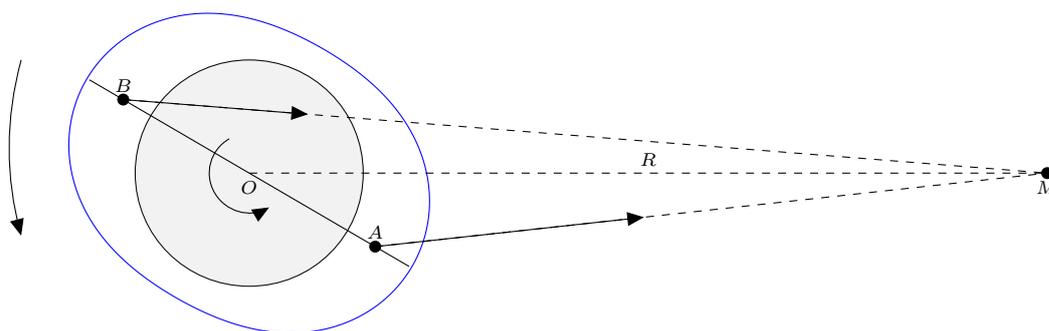


Figura 3.18: Attrito delle maree: caso di rotazione lenta.

OSSERVAZIONE 3.13 - La diminuzione della distanza relativa tra i due corpi ha un effetto disastroso: il momento N è molto sensibile alle diminuzioni di distanza relativa, per cui i suoi effetti aumentano, causando ulteriore avvicinamento. Questo processo a catena termina quando il corpo sarà così vicino al generatore della marea da essere distrutto dalla marea stessa, che sarà diventata maggiore in modulo delle forze che tengono insieme il corpo.

È per questo meccanismo che nessun pianeta può avere un satellite il cui periodo di rotazione propria sia minore della sua velocità orbitale.

3.4.3 Alcune conseguenze

In questa sezione descriviamo alcune conseguenze dell'attrito delle maree.

Perché la Luna corruota?

Non conosciamo quali fossero le velocità di rotazione propria $\omega_{\text{spin},\zeta}$, velocità orbitale n_{orb} e distanza R della Luna dalla Terra al momento della sua formazione, ma, per quanto visto nel paragrafo 3.4.2, possiamo escludere che fosse $\omega_{\text{spin},\zeta} < n_{\text{orb}}$, altrimenti sarebbe andata distrutta. Doveva dunque essere $\omega_{\text{spin},\zeta} > n_{\text{orb}}$. Per quanto visto nel paragrafo 3.4.1, si è attivato un processo evolutivo del sistema Terra-Luna in cui le due si sono allontanate sempre più e la Luna ha diminuito la sua velocità di rotazione propria fino a che non si è avuto $\omega_{\text{spin},\zeta} = n_{\text{orb}}$, che è la situazione di corotazione attuale.

Naturalmente il ragionamento precedente è valido in generale.

Evoluzioni successive

Abbiamo descritto cosa accade al sistema Pianeta-Satellite descrivendo prima di tutto l'effetto del pianeta sul satellite, dominante rispetto all'effetto del satellite sul pianeta. Quando si è raggiunto l'equilibrio, si può considerare puntiforme il satellite (che non subirà evoluzioni ulteriori) e studiare gli effetti mareali sul pianeta. Dobbiamo distinguere anche qui due casi:

- se $\omega_{\text{spin,pian}} > n_{\text{orb}}$, allora si ha l'evoluzione descritta nel paragrafo 3.4.1: il pianeta rallenterà la sua rotazione propria e i due corpi si allontaneranno, fino ad una situazione stabile

finale in cui si ha

$$\omega_{\text{spin,pian}} = \omega_{\text{spin,sat}} = n_{\text{orb}}.$$

Un tale sistema si dice *sincrono*; ad oggi, l'unico esempio di sistema sincrono conosciuto nel Sistema Solare è quello costituito da Plutone e Caronte.

- se $\omega_{\text{spin,pian}} < n_{\text{orb}}$, allora il momento N porterà ad aumentare la velocità di rotazione propria del pianeta, avvicinare i pianeti e, dalla terza legge di Keplero, ad aumentare la velocità di rotazione orbitale. Questo modificherà lo stato di rotazione del satellite, portandolo nella condizione di rotazione lenta. L'effetto complessivo è un avvicinamento sempre più rapido del satellite al pianeta, fino alla sua distruzione. È la situazione in cui si trovano Marte e il suo satellite Phobos.

La marea del Sole nel Sistema Solare

Gli effetti principali della marea del Sole sono due.

- Il Sole è ancora abbastanza vicino alla Terra da impedire che il sistema Terra-Luna arrivi allo stato *sincrono*.
- Mercurio e Venere non possono avere satelliti. Vediamo il caso di Mercurio: questo pianeta è caratterizzato da un'orbita molto eccentrica ($e_{\text{g}} \simeq 0.2$), e ciò porta ad avere

$$\frac{\omega_{\text{spin,g}}}{n_{\text{orb,g}\odot}} \simeq \frac{3}{2},$$

cioè una rotazione propria molto lenta. Se Mercurio avesse avuto un satellite con $\omega_{\text{spin,sat}} > n_{\text{orb,sat,g}}$ (altrimenti sarebbe andato distrutto), questo sarebbe arrivato alla corotazione. Nell'evoluzione successiva, per non avere distruzione del satellite, si sarebbe dovuto avere $\omega_{\text{spin,g}} > n_{\text{orb,sat,g}}$, ma questo non è possibile per la lentezza di Mercurio³.

³Si può calcolare esplicitamente quale dovrebbe essere la velocità di rotazione di un satellite attorno a Mercurio: basta calcolare il raggio di Hill di Mercurio e poi usare la (1.9).

CAPITOLO 4

LA TERRA COME CORPO RIGIDO

Finora abbiamo studiato fenomeni astronomici in cui non interveniva la particolare forma dei corpi celesti. Anzi, abbiamo sempre supposto che questi fossero puntiformi o, se estesi, a simmetria sferica. Quando parliamo dei fenomeni che interessano la Terra, però, non possiamo più trascurare il fatto che questa è ben lontana dall'essere perfettamente sferica: le correzioni apportate al potenziale gravitazionale terrestre che tengono conto di ciò sono anche dell'ordine del millesimo, quindi non ignorabili.

In questo capitolo studieremo la forma effettiva della Terra, analizzando le cause della sua non sfericità, e vedremo a quali fenomeni dà origine.

4.1 Il potenziale di uno sferoide oblato

Come giustificheremo nel seguito, la Terra è approssimabile ad uno *sferoide oblato*: un oggetto tridimensionale ottenuto ruotando un'ellisse attorno al suo semiasse minore. A tal proposito, sarà fondamentale avere a disposizione la forma del potenziale gravitazionale generato da un tale oggetto. Quello che faremo in questa sezione è procurarci uno sviluppo in serie di tale potenziale troncato ad un'opportuno termine.

Si consideri, dunque, in \mathbb{R}^3 uno sferoide oblato di semiassi a e b e massa M , con il centro di massa posto nell'origine di un sistema di riferimento di assi xyz . Sia $P := (x, y, z)$ il generico punto in cui vogliamo calcolare il potenziale e \vec{r} il suo vettore posizione; sia $\vec{\rho}$ il vettore posizione del generico punto dello sferoide (figura 4.1). Supporremo $\rho/r \ll 1$, e trascureremo termini di ordine superiore a ρ^2/r^2 .

Il potenziale dello sferoide nel punto P ha la forma

$$U(x, y, z) = -G \int \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}. \quad (4.1)$$

Per sviluppare come abbiamo fatto nel paragrafo 3.1.1, usiamo la seguente:

$$|\vec{r} - \vec{\rho}| = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta,$$

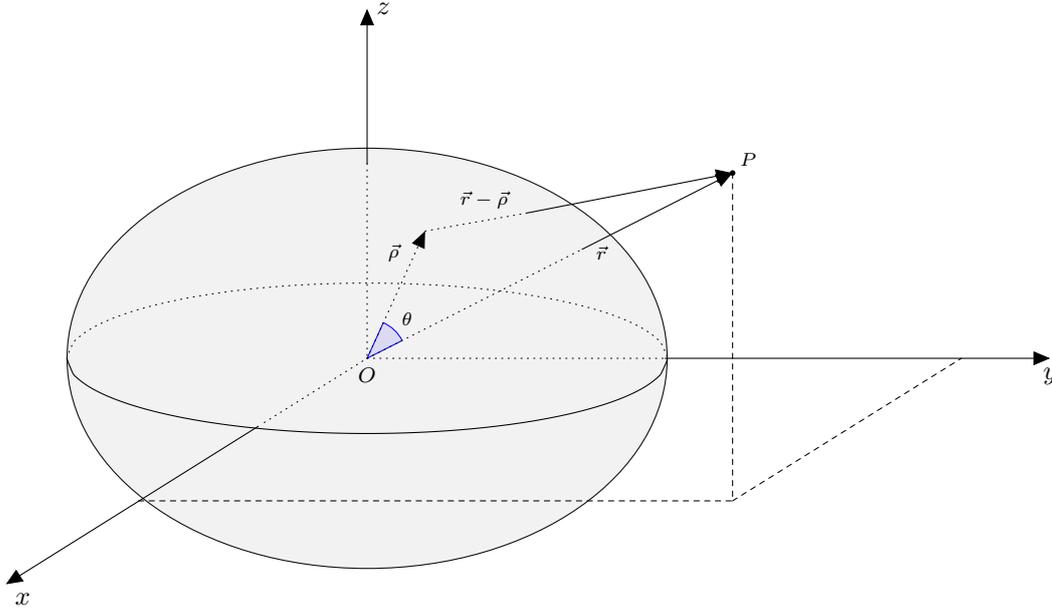


Figura 4.1: Uno sferoide oblato.

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori \vec{r} e $\vec{\rho}$. Sostituendo nella (4.1) e mettendo in evidenza un fattore r , otteniamo:

$$U(x, y, z) = -G \int \frac{dm}{r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)}.$$

A questo punto utilizziamo il seguente sviluppo:

$$(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

con $\epsilon := \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta$; otteniamo che

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{r} \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} + O\left(\frac{\rho^3}{r^3}\right).$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale, otteniamo:

$$U(x, y, z) = - \underbrace{\frac{G}{r} \int dm}_{=:U_0} - \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta dm}_{=:U_1} - \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} dm}_{=:U_2} + O\left(\frac{\rho^3}{r^3}\right).$$

Analizziamo i singoli addendi.

- Il primo termine, U_0 , è il termine di *monopolo* e vale, naturalmente,

$$U_0 = \frac{GM}{r}.$$

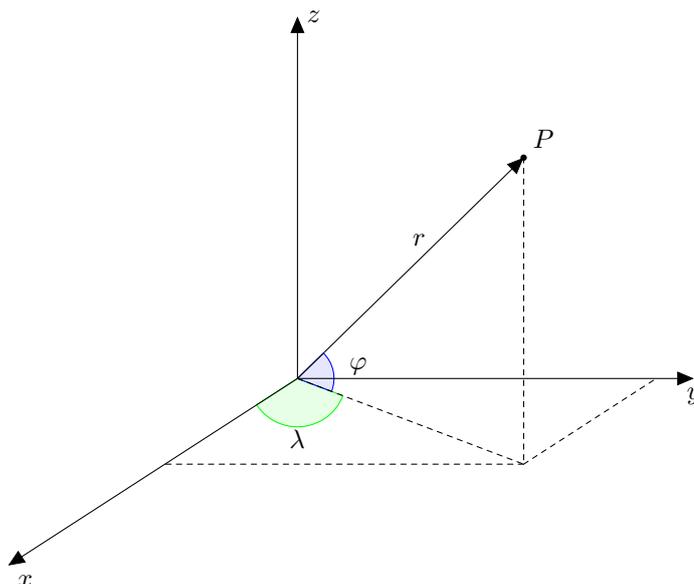


Figura 4.2: Coordinate polari.

- L'addendo U_1 è il termine di *dipolo* e ci aspettiamo che sia nullo. Dimostriamolo: se $\vec{\rho} := (\xi, \eta, \zeta)$, allora

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta \, dm = \frac{G}{r^3} \int \vec{\rho} \cdot \vec{r} \, dm \\ &= \frac{G}{r^3} \left(x \int \xi \, dm + y \int \eta \, dm + z \int \zeta \, dm \right) = 0, \end{aligned}$$

perché $(x \int \xi \, dm, y \int \eta \, dm, z \int \zeta \, dm)$ sono le coordinate del centro di massa dello sferoide, che noi abbiamo posto nell'origine.

- L'ultimo termine è detto di *quadrupolo* e vorremmo riscriverlo in modo da comprendere con esattezza da quali grandezze dipende. Per fare ciò, consideriamo un sistema di riferimento di assi XYZ in cui l'asse X coincide con la direzione del vettore \vec{r} . In questo sistema di riferimento abbiamo che, se $\vec{\rho} = (X, Y, Z)$, allora $X = \rho \cos \theta$.

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \, dm = \frac{G}{2r^3} \left(\int 3X^2 \, dm - \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \left(\int 3(X^2 - \rho^2) \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) = \frac{G}{2r^3} \left(-3 \int Y^2 + Z^2 \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \int [2\rho^2 - 3(Y^2 + Z^2)] \, dm. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A questo punto, poniamo

$$I := \int (Y^2 + Z^2) \, dm$$

e osserviamo che corrisponde al momento di inerzia dello sferoide nella direzione X . Inoltre, siano A, B, C i momenti di inerzia dello sferoide rispetto agli assi x, y, z , che ci siamo premurati di scegliere come assi principali di inerzia per lo sferoide. In queste notazioni, la (4.2) diventa

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I).$$

L'espressione appena ottenuta non è ancora soddisfacente. In effetti, la simmetria del corpo ci fa aspettare che il potenziale non dipenda dalla longitudine del punto P , ma solo dalla sua inclinazione rispetto all'equatore. Vorremmo rendere evidente questo fatto ed è essenziale usare coordinate polari (r, λ, φ) (figura 4.2). In queste coordinate abbiamo che

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Usando che

$$I = \int (Y^2 + Z^2) dm = \int \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 dm,$$

calcoliamo un'espressione di I in coordinate polari. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\vec{\rho} \times \vec{r})_x &= \eta r \sin \varphi - \zeta r \cos \varphi \sin \lambda \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_y &= \zeta r \cos \varphi \cos \lambda - \xi r \sin \varphi \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_z &= \xi r \cos \varphi \sin \lambda - \eta r \cos \varphi \cos \lambda, \end{aligned}$$

da cui

$$I = \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int \zeta^2 dm + \cos^2 \varphi \int (\xi^2 \sin^2 \lambda + \eta^2 \cos^2 \lambda) dm;$$

si osservi che gli integrali $\int \eta \zeta dm$, $\int \eta \xi dm$, $\int \xi \zeta dm$ sono nulli, in quanto la terna di assi xyz è fatta di assi principali d'inerzia per lo sferoide.

Sostituendo $\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$, otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int (\zeta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda \int (\eta^2 - \xi^2) dm \\ &= C \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + (A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda. \end{aligned}$$

Il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3C \sin^2 \varphi - 3B \cos^2 \varphi - 3(A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda).$$

Ponendo $\cos^2 \lambda = (1 + \cos 2\lambda)/2$, si ottiene, finalmente,

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{r^3} \left[\left(\frac{A+B}{2} - C \right) P_2(\sin \varphi) - \frac{3}{4}(A-B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right],$$

dove $P_2(t)$ è il polinomio ortogonale di Legendre di grado 2:

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

Grazie alla simmetria dello sferoide oblatto, abbiamo che $A = B$; il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{G}{r^3} (C - A) P_2(\sin \varphi),$$

che non dipende dalla longitudine λ del punto.

Riscrivendo la precedente espressione come

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \frac{(C - A) a^2}{Ma^2} \frac{1}{r^2} P_2(\sin \varphi),$$

otteniamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblatto a meno di termini di ordine superiore a ρ^2/r^2 :

$$U(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{C - A a^2}{Ma^2} \frac{1}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right). \quad (4.3)$$

DEFINIZIONE 4.1 - In uno sferoide oblatto di semiasse maggiore a , massa M e momenti d'inerzia rispetto agli assi di simmetria A, B, C , il *momento di quadrupolo* è la quantità

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}.$$

OSSERVAZIONI 4.2 - - In uno sferoide oblatto il potenziale dipende dallo schiacciamento polare, dalla distanza e dall'inclinazione rispetto all'equatore.

- In generale, il potenziale gravitazionale per un corpo a simmetria assiale è della forma

$$U(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{a}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right),$$

per opportune costanti J_k e dove P_k è il k -esimo polinomio ortogonale di Legendre, definito dalla *formula di Rodrigues*

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

4.2 La Terra come sferoide oblatto

Newton dimostrò nei *Principia* (Libro III, Proposizioni XVIII-XX) che, a causa della sua rotazione, la Terra deve essere uno sferoide oblatto. In questa sezione definiremo alcuni parametri che misurano l'entità dello schiacciamento della Terra e stabiliremo delle relazioni tra di loro, prima assumendo che la densità della Terra sia costante, poi nel caso più generale di densità non costante. Nel seguito, quindi, penseremo alla Terra come ad uno sferoide oblatto ottenuto facendo ruotare un'ellisse di semiasse maggiore a (raggio equatoriale) e semiasse minore b (raggio polare) attorno a quest'ultimo. Indicheremo con M la massa della Terra e con ω_{\oplus} la velocità angolare media di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Considereremo un sistema di riferimento di assi x, y, z , con origine nel centro dell'ellisse.

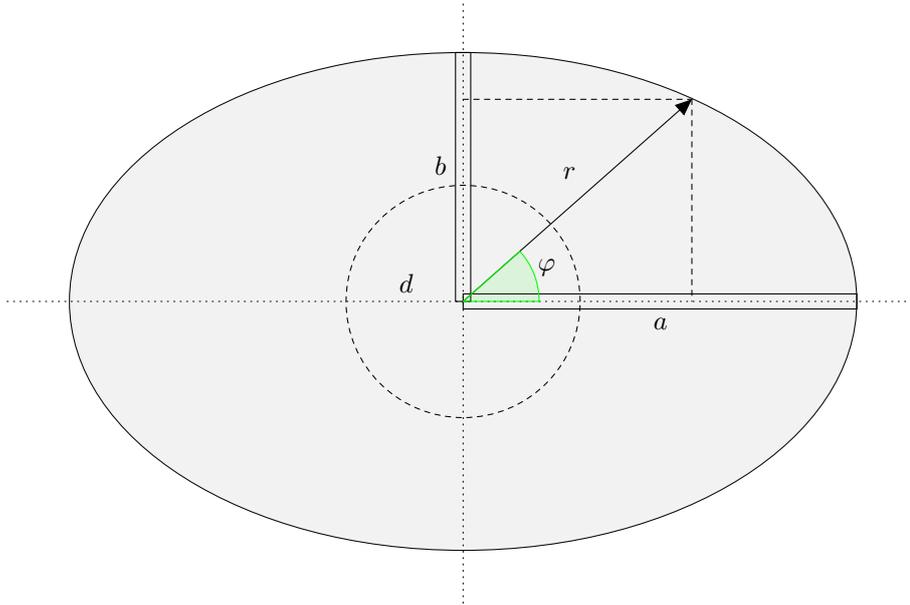


Figura 4.3: Sezione laterale dello sferoide oblato; sono evidenziate le colonne di fluido.

Il primo parametro che definiamo misura¹ l'entità della causa che produce lo schiacciamento. Viene naturale, quindi, definirlo come rapporto delle accelerazioni presenti sulla superficie terrestre:

$$m := \frac{\text{acc. centrifuga all'Equatore}}{\text{acc. locale di gravità all'Equatore}} = \frac{\omega_{\oplus}^2 a}{\frac{GM}{a^2}}. \quad (4.4)$$

Il secondo parametro che definiamo vogliamo che sia un indicatore della geometria dello sferoide e quindi vogliamo che misuri l'entità dello schiacciamento. Chiameremo, quindi, *schiacciamento* o *flattening* della Terra il numero

$$\epsilon := \frac{a - b}{a}. \quad (4.5)$$

Il terzo parametro che definiamo è stato già definito nella sezione precedente e si tratta del momento di quadrupolo J_2 .

Quello di cui ci occuperemo adesso sarà di trovare relazioni tra i tre parametri precedentemente definiti. Studieremo prima il caso a densità costante, nella trattazione data dallo stesso Newton. In seguito, tratteremo il caso più generale.

Densità costante

L'idea² è quella di considerare la Terra come un fluido perfetto e di densità costante, e due colonne di fluido lungo un raggio polare e uno equatoriale (figura 4.3). Queste colonne dovranno

¹Parliamo di misura, ma si tratta di un numero adimensionale.

²Appartenente a Newton.

essere in equilibrio, dunque i loro pesi dovranno essere uguali. Calcoleremo i pesi di queste colonne e li uguaglieremo, ottenendo la relazione cercata.

Iniziamo con l'osservare che i pesi delle due colonne sono proporzionali alle accelerazioni presenti: in particolare, il peso della colonna equatoriale sarà proporzionale all'accelerazione di gravità con una correzione centrifuga, mentre la colonna polare avrà peso proporzionale esclusivamente all'accelerazione di gravità. Poiché, a distanza $d < b$ dal centro della Terra vale:

$$|a_c(d)| \propto \omega_{\oplus}^2 d$$

$$|a_g(d)| = \frac{Gm(d)}{d^2} = \frac{G}{d^2} \frac{4}{3} \pi d^3 \rho_{\oplus} = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_{\oplus} \right) d$$

allora sono entrambe proporzionali a d , per cui il fattore di diminuzione dell'accelerazione di gravità è sempre lo stesso. Poiché a noi interessa il rapporto delle accelerazioni, possiamo calcolare il valore delle accelerazioni sulla superficie della Terra, per cui:

$$\text{peso colonna equatoriale} \propto a(g_{\text{eq}} - \omega_{\oplus}^2 a) = ag_{\text{eq}}(1 - m)$$

$$\text{peso colonna polare} \propto bg_{\text{pol}}.$$

Uguagliando i due pesi, otteniamo

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} = \frac{a}{b}(1 - m). \quad (4.6)$$

Poiché $\epsilon = (a - b)/a$, allora $b/a = 1 - \epsilon$ e, visto che $\epsilon \ll 1$, $a/b \simeq 1 + \epsilon$. D'ora in poi, quando compare ϵ , considereremo sempre sviluppi al primo ordine. Sostituendo nella (4.6), otteniamo:

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} \simeq (1 - m)(1 + \epsilon). \quad (4.7)$$

A questo punto si tratta di valutare il rapporto $g_{\text{pol}}/g_{\text{eq}}$. Riprendiamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblatto (4.3): abbiamo che

$$g(r, \varphi) = -\frac{\partial U}{\partial r}(r, \varphi) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 J_2 P_2(\sin \varphi). \quad (4.8)$$

In caso di uno sferoide oblatto di densità costante, abbiamo

$$A = B = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2), \quad C = \frac{2}{5} M a^2,$$

dunque

$$J_2 = \frac{1}{5} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{5} (1 - (1 - \epsilon)^2) \simeq \frac{1}{5} (1 - (1 - 2\epsilon)) = \frac{2}{5} \epsilon.$$

Sostituendo nella (4.8), otteniamo

$$g(r, \varphi) \simeq -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 \frac{2}{5} \epsilon \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2}.$$

Calcoliamo le accelerazioni sulla superficie, rispettivamente all'equatore e al polo³:

$$\begin{aligned} g_{\text{eq}} &= g(a, 0) \simeq -\frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{5}\epsilon\right) \\ g_{\text{pol}} &= g(b, \pi/2) \simeq -\frac{GM}{b^2} + \frac{3GM}{b^4} a^2 \frac{2}{5}\epsilon \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - 3(1 + \epsilon)^2 \frac{2}{5}\epsilon\right) \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon - \frac{12}{5}\epsilon^2\right) \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon\right). \end{aligned}$$

Grazie alle precedenti, otteniamo

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} \simeq \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\epsilon\right) \simeq (1 + 2\epsilon) \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\epsilon\right) \simeq 1 + \frac{1}{5}\epsilon.$$

Sostituendo nella (4.7), abbiamo

$$(1 - m)(1 + \epsilon) \simeq 1 + \frac{1}{5}\epsilon,$$

da cui

$$1 - m \simeq \left(1 + \frac{1}{5}\epsilon\right) (1 - \epsilon) \simeq 1 - \epsilon + \frac{1}{5}\epsilon = 1 - \frac{4}{5}\epsilon.$$

In definitiva,

$$\epsilon = \frac{5}{4}m. \quad (4.9)$$

Densità non costante

La Terra, però, non ha densità costante. In questo caso, assumiamo che la superficie della Terra sia equipotenziale rispetto al potenziale gravitazionale e al potenziale centrifugo; perciò, sulla superficie della Terra:

$$U(r, \varphi) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 r^2 \cos^2 \varphi = \frac{GM}{r} - \frac{G(C - A)}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 r^2 \cos^2 \varphi = \text{cost.} \quad (4.10)$$

Vogliamo far comparire, nell'equazione appena scritta, il parametro di schiacciamento ϵ . Per far ciò, scriveremo l'equazione polare dell'ellisse che genera lo sferoide e la sostituiremo nella precedente.

Partendo dall'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

³Un lettore potrebbe obiettare che stiamo usando una formula valida per $R \gg \rho$, quindi non sarebbe corretto utilizzarla per $R = \rho$; in realtà si può dimostrare che non stiamo commettendo alcun errore.

poiché possiamo parametrizzarla come $y = r \cos \varphi$ e $z = r \sin \varphi$, otteniamo

$$r^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi} = \frac{a^2(1 - e^2)}{\sin^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi}.$$

È fondamentale osservare che

$$(1 - e^2) = \frac{b^2}{a^2} = (1 - \epsilon)^2,$$

perciò

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - \epsilon)}{\sqrt{\sin^2 \varphi + (1 - \epsilon)^2 \cos^2 \varphi}} \\ &= a(1 - \epsilon)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 2\epsilon \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\ &\simeq a(1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\ &\simeq a(1 - \epsilon)(1 + \epsilon \cos^2 \varphi) \\ &\simeq a(1 - \epsilon(1 - \cos^2 \varphi)) \\ &= a(1 - \epsilon \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Definiamo $\eta := \epsilon \sin^2 \varphi$, per cui $r = a(1 - \eta)$. Nel sostituire quest'ultima equazione nella (4.10), trascureremo i termini dell'ordine di η^2 , ma anche i termini in cui η moltiplica il potenziale centrifugo e $C - A$, essendo queste quantità molto piccole; inoltre, i termini costanti li portiamo a secondo membro. Procediamo:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{a(1 - \eta)} - \frac{G(C - A)}{2a^3(1 - \eta)^3} (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2} \omega_{\oplus}^2 a^2 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi &= \text{cost.} \\ \frac{GM}{a} (1 + \eta) - \frac{G(C - A)}{2a^3} (1 + 3\eta) (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2} \omega_{\oplus}^2 a^2 (1 - 2\eta) \cos^2 \varphi &= \text{cost.} \\ \frac{GM}{a} (\underbrace{1}_{\text{cost.}} + \eta) - \frac{G(C - A)}{2a^3} (3 \sin^2 \varphi - \underbrace{1}_{\text{cost.}} + \underbrace{9\eta \sin^2 \varphi}_{\text{trasc.}} - \underbrace{3\eta}_{\text{trasc.}}) + \frac{1}{2} \omega_{\oplus}^2 a^2 (1 - \underbrace{2\eta}_{\text{trasc.}}) \cos^2 \varphi &= \text{cost.} \\ \frac{GM}{a} \eta - \frac{3}{2} \frac{G(C - A)}{a^3} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \omega_{\oplus}^2 a^2 \sin^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo posto la costante del potenziale uguale a 0: ciò è legittimo perché il potenziale è definito a meno di costante. Dalla (4.11), otteniamo:

$$\eta = \left(\frac{3(C - A)}{2Ma^2} + \frac{\omega_{\oplus}^2 a^3}{2GM} \right) \sin^2 \varphi,$$

da cui, ricordando la definizione di η , J_2 e m ,

$$\epsilon = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m. \quad (4.12)$$

OSSERVAZIONE 4.3 - Se ρ_{\oplus} è costante, la precedente si riconduce alla (4.9): infatti, in quel caso $J_2 = 2/5\epsilon$, da cui

$$\epsilon = \frac{3}{5}\epsilon + \frac{m}{2} \implies \epsilon = \frac{5}{4}m.$$

Dati numerici

Nel caso della Terra, è possibile misurare i parametri che abbiamo definito.

Parametro	Valore per la Terra
ϵ	1/298.2
m	$3.46 \cdot 10^{-3}$
J_2	$1.08 \cdot 10^{-3}$

I valori presenti nella precedente tabella si riferiscono ad un raggio equatoriale $a = 6.378 \cdot 10^6$ m. È, inoltre, possibile misurare il valore $(C - A)/A$:

$$\frac{C - A}{A} \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}.$$

4.3 Moti della Terra come corpo rigido

In questo paragrafo descriveremo due importanti moti di precessione che interessano la Terra: il primo è il moto di precessione libera, che non tiene conto dell'interazione gravitazionale con altri corpi celesti; il secondo è il moto di precessione luni-solare che, al contrario del primo, è causato dalla presenza del Sole e della Luna. Avremo prima bisogno di scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso.

4.3.1 Equazioni di Eulero

In questo paragrafo daremo per buone le nozioni di corpo rigido e di sistema di riferimento solidale al corpo rigido.

Siano Σ, Σ' due sistemi di riferimento, sia $\vec{\omega}$ la velocità angolare di Σ rispetto a Σ' . Vale la seguente relazione:

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (4.13)$$

Supponiamo adesso di avere un corpo rigido \mathcal{C} e che Σ sia un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa di \mathcal{C} , mentre Σ' sia solidale a \mathcal{C} .

PROPOSIZIONE 4.4 - *Esiste una matrice \mathcal{I} tale che il momento angolare \vec{L} del corpo rigido soddisfa la seguente relazione:*

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}, \quad (4.14)$$

dove ω è la velocità angolare del corpo rigido.

Dimostrazione. Supponiamo che il corpo rigido sia formato da N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N , posizioni $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ e velocità $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$. Il momento angolare totale risulta

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i).\end{aligned}$$

In componenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}L_x &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2).\end{aligned}$$

È evidente che le precedenti sono relazioni lineari in $\vec{\omega}$, per cui è possibile definire una matrice \mathcal{I} tale che

$$\vec{L} = \mathcal{I} \vec{\omega}.$$

□

OSSERVAZIONI 4.5 - - La precedente proposizione vale anche nel caso di un corpo rigido continuo: basta sostituire le somme con integrali.

- La matrice \mathcal{I} è detta *tensore di inerzia* del corpo rigido ed è evidentemente simmetrica. Si può dimostrare che è anche definita positiva nel caso in cui esistano almeno tre punti del corpo rigido non allineati. Ciò ci garantisce che esiste un sistema di riferimento ortonormale in cui la matrice \mathcal{I} è diagonale: un tale sistema di riferimento viene detto *riferimento principale d'inerzia* ; i corrispondenti autovalori sono i *momenti principali d'inerzia* .

Siamo pronti a scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso. Indichiamo con \vec{N}^e il momento delle forze esterne che agiscono su \mathcal{C} .

PROPOSIZIONE 4.6 (EQUAZIONI DI EULERO) - *Sia Σ' un sistema di riferimento principale d'inerzia per il corpo rigido \mathcal{C} solidale ad esso e supponiamo che in tale riferimento i vettori $\vec{\omega}$, \vec{N}^e abbiano rispettivamente componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e N_x^e, N_y^e, N_z^e ; siano I_1, I_2, I_3 i momenti principali d'inerzia in Σ' . Valgono le seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned}N_x^e &= I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z \\ N_y^e &= I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_x \omega_z \\ N_z^e &= I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dimostrazione. Sia Σ un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del corpo rigido. In Σ vale l'equazione cardinale

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{N}^e.$$

Inoltre, dalla (4.14),

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}.$$

Scriviamo la (4.13) con $\vec{u} = \vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{N}^e &= \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \mathcal{I}\vec{\omega}. \end{aligned}$$

La precedente, scritta in coordinate, dà esattamente le (4.15). \square

4.3.2 Precessione libera della Terra rigida

Per la descrizione del moto di precessione libera supporremo che la Terra sia un corpo rigido della forma di uno sferoide oblato non soggetto a forze esterne. Osserviamo che un qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra $\Sigma' = \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ con origine nel centro di massa e in cui \hat{e}_x, \hat{e}_y sono nel piano equatoriale, è un sistema di riferimento principale d'inerzia. Se I_1, I_2, I_3 sono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi x, y, z , allora abbiamo che $I_1 = I_2 < I_3$. Supponiamo che la Terra ruoti con velocità angolare $\vec{\omega}_{\oplus}$ non parallela all'asse z e siano $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ le componenti di $\vec{\omega}_{\oplus}$ rispetto al riferimento Σ' .

PROPOSIZIONE 4.7 - *Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}_{\oplus}$ descrive, nel riferimento Σ' , un cono attorno all'asse z .*

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni di Eulero per la Terra in questo caso. Poiché la Terra non è soggetta a forze esterne, allora $\vec{N}^e = \vec{0}$:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_1 \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0. \end{cases}$$

La terza equazione ci dice che ω_z è costante, per cui possiamo porre $\Omega := \omega_z (I_1 - I_3) / I_1$, ottenendo

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \Omega \omega_y \\ \dot{\omega}_y = -\Omega \omega_x. \end{cases}$$

Le precedenti possono essere disaccoppiate ottenendo le equazioni di due oscillatori armonici di soluzione

$$\begin{cases} \omega_x = A \sin(\Omega t) \\ \omega_y = A \cos(\Omega t) \\ \omega_z = B \end{cases}$$

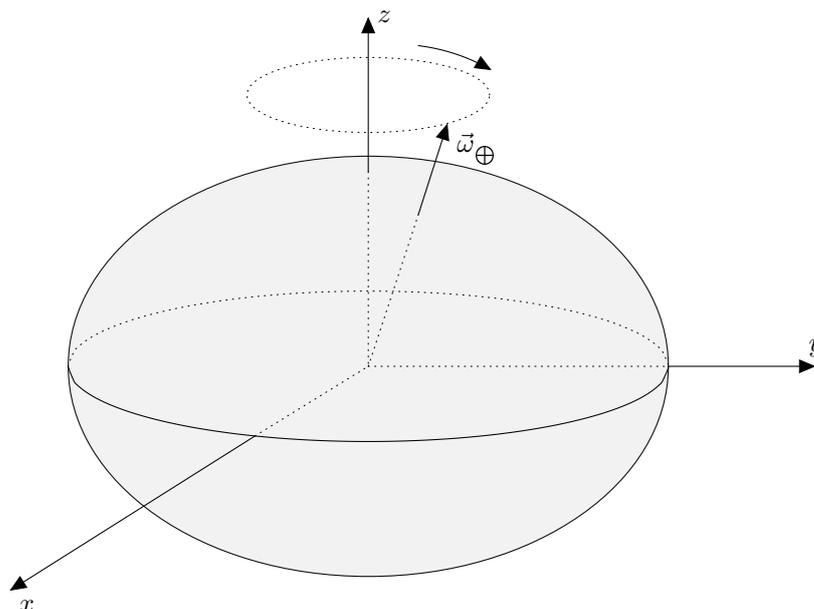


Figura 4.4: Precessione libera della Terra rigida.

con A, B costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Si conclude osservando che le precedenti sono equazioni parametriche per un cono di asse coincidente con z . \square

OSSERVAZIONI 4.8 - - La quantità Ω è chiamata *velocità angolare di precessione* ed è la frequenza con cui gira $\vec{\omega}_{\oplus}$. Osserviamo che $\Omega < 0$, per cui il moto di precessione avviene in verso opposto alla rotazione della Terra.

- Per la Terra abbiamo che $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 3.3 \cdot 10^{-3}$, da cui ricaviamo che il periodo di precessione libera è di circa 300 giorni. In realtà si osserva che il periodo effettivo è di circa 427 giorni; la differenza è dovuta all'elasticità della Terra.
- Il fenomeno che si osserva in un riferimento inerziale è il cosiddetto "Chandler wobble", dal nome dello scienziato che per primo ne misurò il periodo. Un problema aperto è quello di determinare la ragione per cui non si verifica uno smorzamento della precessione libera.

4.3.3 Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra

Il Sole non si trova sul piano equatoriale della Terra, ma su un piano, detto *piano dell'eclittica*, inclinato rispetto a questo di un angolo $\epsilon = 23,5^\circ$. Se la Terra non avesse una rotazione propria, l'attrazione gravitazionale del Sole tenderebbe a spostare la Terra, fino a far coincidere il piano equatoriale con quello dell'eclittica. Poiché la Terra ruota, l'attrazione gravitazionale

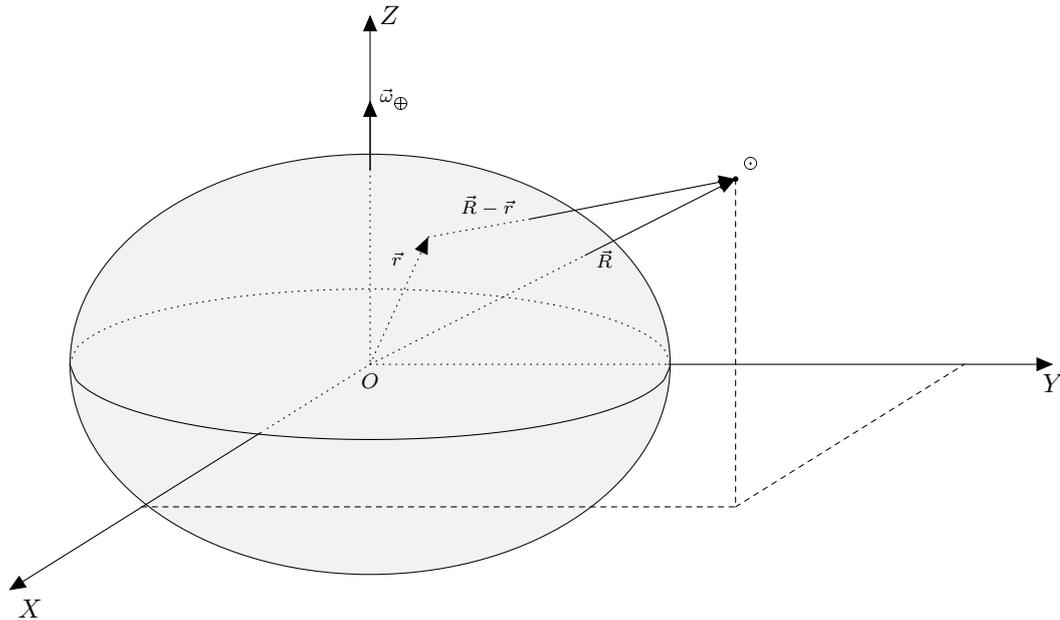


Figura 4.5: Riferimento inerziale della Terra.

del Sole riesce solo a far descrivere un cono all'asse di rotazione terrestre attorno alla perpendicolare al piano dell'eclittica, causando la cosiddetta *precessione lunisolare*. In questo paragrafo descriveremo quantitativamente questo fenomeno.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale Σ con origine nel centro di massa della Terra e di assi XYZ , con Z asse di simmetria della Terra⁴. Sia \vec{R} la posizione del Sole, di coordinate (X, Y, Z) (figura 4.5). Supponiamo che la Terra ruoti attorno all'asse Z con velocità angolare $\vec{\omega}_\oplus$, trascurando così il moto di precessione libera. Su ogni elemento di massa dm della Terra agisce una forza elementare esercitata dal Sole di intensità

$$d\vec{F} = \frac{GMdm(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}.$$

Osserviamo che nel calcolo di questa forza possiamo trascurare la rotazione della Terra, grazie alla simmetria dello sferoide oblato. Al solito, supponiamo che $R \gg r$, per cui, sviluppando e

⁴Possiamo pensare al piano XY come al piano dell'equatore celeste e Z in direzione del Polo Nord Celeste.

trascurando termini di ordine superiore a r/R :

$$\begin{aligned} |\vec{R} - \vec{r}|^{-3} &= (R^2 + r^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r})^{-\frac{3}{2}} \\ &= R^{-3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\simeq R^{-3} \left(1 - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\simeq R^{-3} \left(1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

La forza, quindi, diventa:

$$d\vec{F} = \frac{GMdm}{R^3} \left(1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{R} - \vec{r}).$$

Calcoliamo, adesso, il momento della forza esercitata dal Sole: ricaviamo prima il momento elementare della forza e poi integreremo sul corpo rigido per ottenere il momento totale. Il momento elementare è

$$\begin{aligned} d\vec{K} &:= \vec{r} \times d\vec{F} \\ &\simeq \frac{GMdm}{R^3} \left(1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{r} \times \vec{R}), \end{aligned}$$

mentre il momento totale è

$$\vec{K} \simeq \frac{GM}{R^3} \int \left(1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{r} \times \vec{R}) dm.$$

Osserviamo che l'addendo $\int (\vec{r} \times \vec{R}) dm$ è uguale a $(\int \vec{r} dm) \times \vec{R}$ che a sua volta è nullo perché $\int \vec{r} dm$ sono le coordinate del centro di massa, che abbiamo posto nell'origine. Il momento si riduce a

$$\vec{K} \simeq \frac{3GM}{R^5} \int (\vec{r} \cdot \vec{R})(\vec{r} \times \vec{R}) dm.$$

Osserviamo adesso che il riferimento prescelto è un riferimento principale d'inerzia, con associati momenti principali d'inerzia A, B, C dati da:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm = A \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned}$$

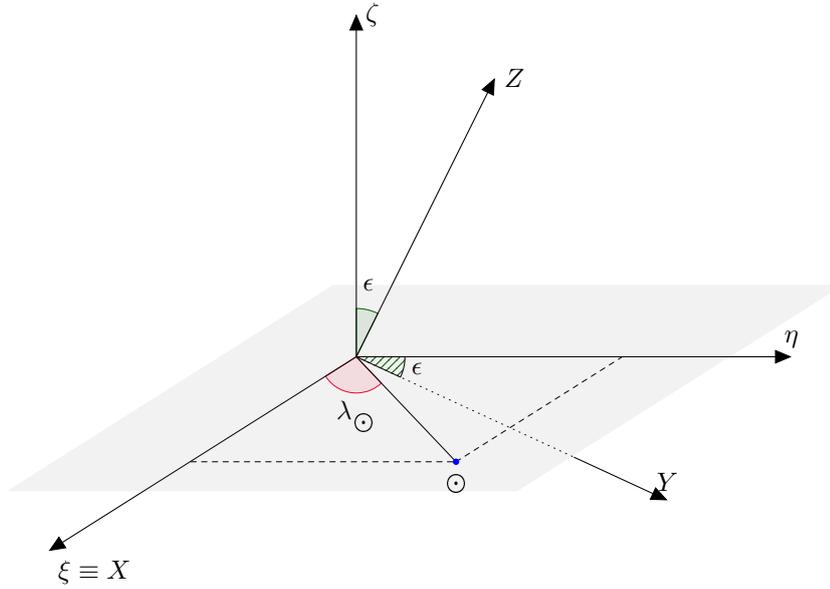


Figura 4.6: Il riferimento della Terra e dell'eclittica.

Esplicitiamo le componenti di \vec{K} : se $\vec{r} = (x, y, z)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} K_X &\simeq \frac{3GM}{R^5} \int (xX + yY + zZ)(yZ - zY) \, dm \\ &= \frac{3GM}{R^5} YZ \int (y^2 - z^2) \, dm \\ &= \frac{3GM}{R^5} (C - A)YZ. \end{aligned}$$

Un conto analogo mostra che

$$\begin{aligned} K_Y &\simeq -\frac{3GM}{R^5} (C - A)XZ \\ K_Z &\simeq \frac{3GM}{R^5} (B - A)XY = 0. \end{aligned}$$

È semplice verificare che $\vec{K} \cdot \vec{R} = 0$. Questo, unito al fatto che $K_Z = 0$, ci fa concludere che \vec{K} è diretto lungo l'asse X , perciò tenderà a far precedere il vettore velocità angolare $\vec{\omega}_{\oplus}$, che descriverà un cono attorno all'asse perpendicolare al piano dell'eclittica.

Calcoliamo, adesso, la velocità angolare di precessione. Mettiamo coordinate $\xi \equiv X, \eta$ sul piano dell'eclittica e sia ζ l'asse perpendicolare (figura 4.6). In questo riferimento, che denotiamo con Σ' , il Sole avrà coordinate

$$\vec{R} = (R \cos \lambda_{\odot}, R \sin \lambda_{\odot}, 0),$$

dove λ_{\odot} è la longitudine del Sole. Inoltre, il vettore \vec{K} avrà coordinate date da

$$\begin{pmatrix} K_{\xi} \\ K_{\eta} \\ K_{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{pmatrix} = \frac{3GM}{R^3} (C - A) \sin \epsilon \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_{\odot} \cos \epsilon \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \sin \epsilon \end{pmatrix}.$$

Il suo modulo dipende da $C - A$ e dall'inverso del cubo della distanza: l'effetto che si avrà sarà piccolo rispetto alla rotazione principale della Terra, quindi il periodo di precessione sarà lungo. Supponiamo che $T_{\text{prec}} \gg 1\text{yr}$ (è un'ipotesi che verificheremo a posteriori, ma è ragionevole). L'effetto che apprezziamo ha un periodo molto lungo, dunque non è scorretto pensare al Sole in una posizione media rispetto a quelle che occupa sull'eclittica durante l'anno: possiamo calcolare l'effetto di precessione *mediando* sulla posizione del Sole in un anno. In questo modo, otteniamo $\overline{K}_{\eta} = \overline{K}_{\zeta} = 0$ e

$$\overline{K}_{\xi} = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon.$$

Per il momento angolare $\vec{L} = C\vec{\omega}_{\oplus}$, vale l'equazione fondamentale

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \vec{K}.$$

Sia, ora, Σ'' il sistema di riferimento solidale con la Terra che descrive il moto dell'asse Z . Tale sistema di riferimento avrà una velocità angolare $\vec{\Omega}_{\text{prec}} = \Omega_{\text{prec}} \hat{\zeta}$, che soddisfa, per la (4.13):

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma''} + \vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L}.$$

Nel riferimento Σ'' il vettore \vec{L} è fermo, dunque la precedente equazione diventa, tenendo conto dell'equazione fondamentale,

$$\vec{K} = \vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L}.$$

Da questa ricaviamo:

$$\overline{K}_{\xi} = (\vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L})_{\xi} = -\Omega_{\text{prec}} L_{\eta} = -\Omega_{\text{prec}} L \sin \epsilon.$$

Concludiamo che

$$\Omega_{\text{prec}} = -\frac{\overline{K}_{\xi}}{L \sin \epsilon} = -\frac{3GM}{2R^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon.$$

OSSERVAZIONE 4.9 - Abbiamo studiato il moto di precessione nel caso della Terra e del Sole, ma nulla cambia se si considera la Terra e la Luna: difatti, gli effetti dei due corpi vanno sommati per ottenere il periodo effettivo della precessione lunisolare. Possiamo distinguere:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{prec}, \odot} &= -\frac{3GM_{\odot}}{2d_{\odot\oplus}^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon \\ \Omega_{\text{prec}, \zeta} &= -\frac{3GM_{\zeta}}{2d_{\zeta\oplus}^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon. \end{aligned}$$

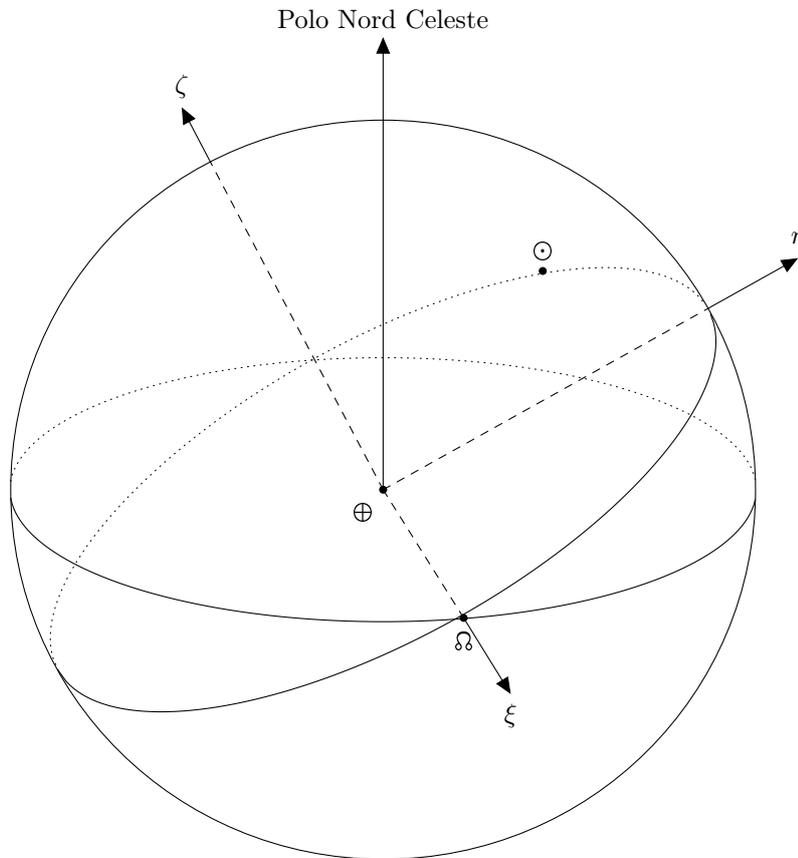


Figura 4.7: La Sfera Celeste e il riferimento dell'eclittica.

Come accade per le maree, l'effetto della Luna è più importante dell'effetto del Sole di un fattore 2.2:

$$\frac{\Omega_{\text{prec}, \zeta}}{\Omega_{\text{prec}, \odot}} = \frac{M_{\zeta}}{M_{\odot}} \cdot \frac{d_{\odot \oplus}^3}{d_{\zeta \oplus}^3} \simeq 2.2.$$

Pertanto la velocità angolare di precessione lunisolare è $\Omega_{\text{lunisol}} = 3.2\Omega_{\text{prec}, \odot}$. Facendo i dovuti calcoli, tenendo conto che $(C - A)/C \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}$, si trova che il periodo della precessione lunisolare è

$$T_{\text{lunisol}} \simeq 26000 \text{ yr.}$$

APPENDICE A

MOTI DEL SOLE, DELLA TERRA E DELLA LUNA

La Terra, oltre il moto di rivoluzione attorno al Sole, ruota attorno a se stessa compiendo la cosiddetta *rotazione propria*. È fondamentale, nello studio delle maree e dei fenomeni astronomici in generale, conoscere la durata di questa rotazione propria. Spesso, però, sarà importante riferire questa rotazione non alle stelle fisse¹, ma al Sole o alla Luna. Lo scopo di questa appendice è definire questi diversi tipi di *giorni* e calcolarne la durata.

Giorno sidereo e giorno solare

Il giorno sidereo è il periodo di rotazione propria della Terra rispetto alle stelle fisse.

DEFINIZIONE A.1 - Si definisce *giorno sidereo* l'intervallo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi di un medesimo astro su un certo meridiano. Un giorno sidereo dura $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 0.4^{\text{s}}$, cioè 86160^{s} .

Da questo otteniamo che la velocità angolare media della Terra di rotazione propria è

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{86160^{\text{s}}}.$$

La vita di tutti i giorni è regolata dal Sole, per cui è perfettamente legittimo considerare il giorno riferito al Sole.

DEFINIZIONE A.2 - Il *giorno solare* è il periodo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi del Sole su un certo meridiano.

Il giorno solare non coincide col giorno sidereo, ma è più lungo: ciò è dovuto al fatto che, durante la sua rotazione propria, la Terra si è spostata lungo la sua orbita attorno al Sole, per cui dovrà ruotare ancora un po' attorno a se stessa affinché il Sole ritorni sul medesimo meridiano (figura A.1). Inoltre, poiché la velocità angolare di rotazione attorno al Sole non è costante, l'angolo α spazzato in un giorno sidereo non è sempre lo stesso. Sapendo, però, che in 365^{d} la

¹Consideriamo *stelle fisse* quegli astri che, grazie alla loro grande distanza dalla Terra, non mutano la loro posizione in tempi brevi.

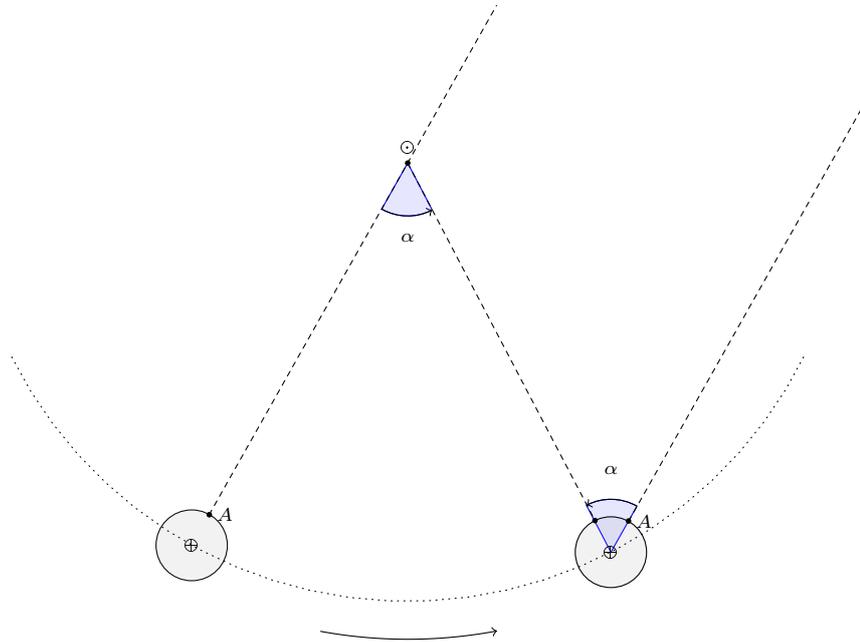


Figura A.1: Giorno solare della Terra.

Terra fa un giro completo, cioè spazza 360° , possiamo assumere che in un giorno essa spazzi 1° . Tale angolo è lo stesso che la Terra deve spazzare nella rotazione attorno a se stessa perché il Sole torni sullo stesso meridiano (figura A.1). A questo punto è semplice calcolare qual è il tempo supplementare di rotazione della Terra: se t_α è questo tempo, si deve avere

$$t_\alpha \omega_\oplus = \frac{2\pi}{360},$$

da cui $t_\alpha = 4^m$. Ne consegue che un giorno solare dura circa 24^h .

Mese sidereo e mese sinodico della Luna

DEFINIZIONE A.3 - Il *mese sidereo* della Luna è il periodo di rotazione della Luna attorno alla Terra, rispetto alle stelle fisse. Esso dura 27.32166^d .

Possiamo, quindi, calcolare la velocità angolare media di rotazione della Luna attorno alla Terra n_ζ :

$$n_\zeta = \frac{2\pi}{27.32166 \cdot 86400^s}$$

Così come abbiamo fatto con la rotazione della Terra, possiamo riferire al Sole la rotazione della Luna:

DEFINIZIONE A.4 - Il *mese sinodico* è l'intervallo di tempo dopo il quale la Luna, nella sua rotazione attorno alla Terra, assume la stessa posizione rispetto al Sole.

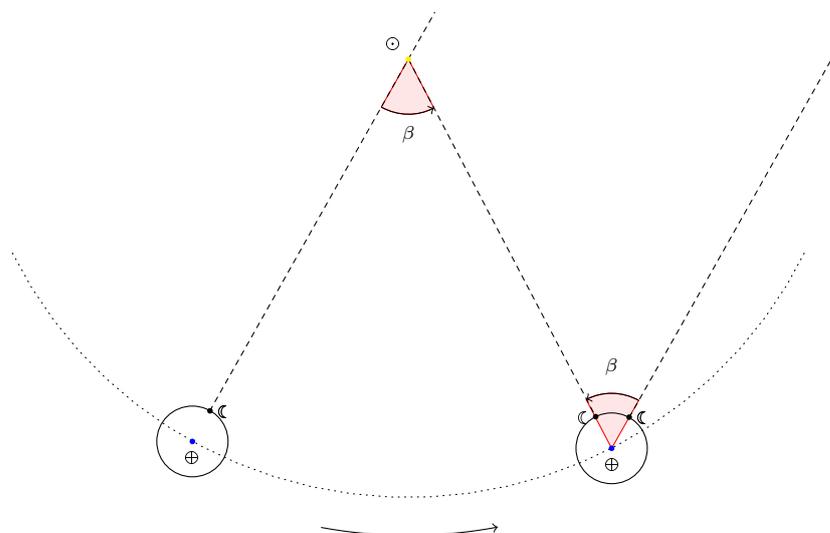


Figura A.2: Mese sinodico della Luna

OSSERVAZIONE A.5 - Il mese sinodico è il periodo rispetto al quale si rispettano le fasi lunari.

Analogamente a quanto accade per la Terra, il mese sinodico è più lungo del sidereo: infatti, mentre la Luna ruota attorno alla Terra, quest'ultima si sposta attorno al Sole spazzando un angolo β di circa 27° (figura A.2). Questo è lo stesso angolo che la Luna deve spazzare per ritornare nella stessa posizione rispetto al Sole, impiegando un tempo supplementare t_β tale che

$$n_{\zeta} t_\beta = 27 \cdot \frac{2\pi}{360};$$

abbiamo, quindi, $t_\beta \simeq 2^d$. Precisamente, abbiamo che il mese sinodico della Luna dura 29.53059^d .

Giorno sinodico della Luna

Per lo studio delle maree dovute alla Luna e della loro periodicità, è fondamentale considerare il giorno sinodico della Luna.

DEFINIZIONE A.6 - Il *giorno sinodico lunare* è il tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi della Luna sul medesimo meridiano terrestre.

Il giorno sinodico lunare è più lungo di un giorno sidereo perché, dopo un giorno sidereo, la Luna si è mossa lungo la sua orbita attorno alla Terra: per ritrovare la Luna sullo stesso meridiano, la Terra dovrà spazzare un angolo γ attorno a se stessa pari all'angolo spazzato dalla Luna in un giorno sidereo (figura A.3). Poiché $\gamma \simeq 13^\circ$, allora il giorno sinodico lunare sarà più lungo di un giorno sidereo di un tempo t_γ pari a

$$t_\gamma \simeq \frac{86400^s}{27} \simeq 53^m.$$

Concludiamo che un giorno sinodico lunare dura $24^h 50.4^m$.

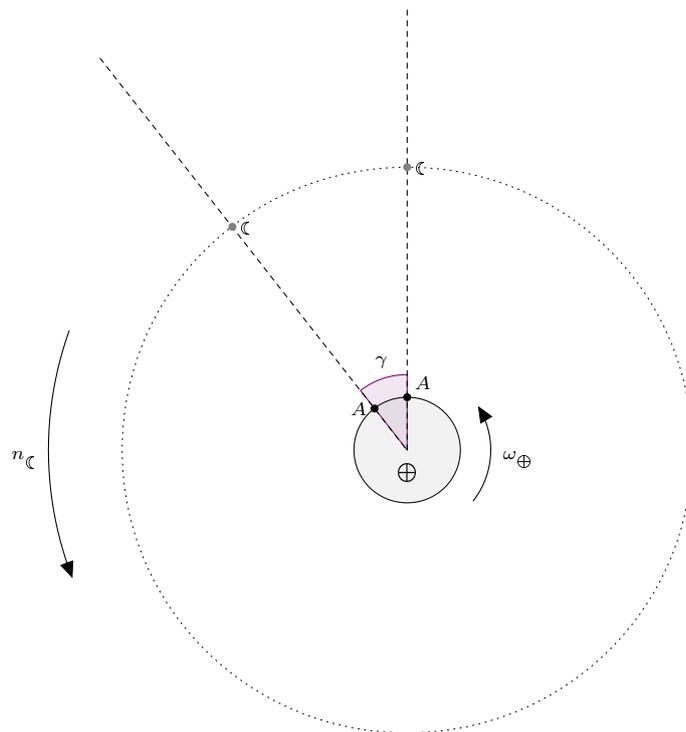


Figura A.3: Giorno sinodico lunare.

TAVOLA DELLE COSTANTI

MASSE DEI CORPI CELESTI

Massa del Sole $m_{\odot} = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg

Massa di Mercurio $m_{\text{♁}} = 3.3 \cdot 10^{23}$ kg

Massa della Terra $m_{\oplus} = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg

Massa della Luna $m_{\text{☾}} = 7.33 \cdot 10^{22}$ kg $\simeq 1/80 \cdot m_{\oplus}$

Massa di Giove $m_{\text{♃}} = 1.89 \cdot 10^{27}$ kg $\simeq m_{\odot} \cdot 10^{-3}$

RAGGI DEI CORPI CELESTI

Raggio della Terra $R_{\oplus} = 6.37 \cdot 10^6$ m

Raggio della Luna $R_{\text{☾}} = 1.37 \cdot 10^6$ m

Raggio di Mercurio $R_{\text{♁}} = 2.44 \cdot 10^6$ m

DISTANZE RELATIVE TRA CORPI CELESTI

Distanza Terra-Sole $d_{\odot\oplus} = 1.49 \cdot 10^{11}$ m = 1 UA

Distanza Terra-Luna $d_{\oplus\text{☾}} = 3.84 \cdot 10^8$ m

Distanza Sole-Giove $d_{\odot\text{♃}} = 11.3$ UA

Semiassse maggiore di Mercurio $a_{\text{♁}} = 0.38$ UA